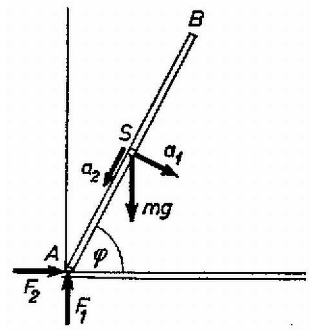
I. megoldás. Vizsgáljuk először az a) esetet! A rúd az mg súlyerő és a falak F_1 és F_2 nyomóerőinek hatására az A pont körül gyorsuló forgómozgást végez.



A súlypont gyorsulását felbonthatjuk érintőirányú a_1 és rúdirányú a_2 összetevőkre. Abban a pillanatban, amikor a rúd elválik a függőleges faltól, F_2-nek nullának kell lennie. Ekkor viszont vízszintes erő hiányában a súlypont gyorsulásának sem lehet vízszintes összetevője, vagyis

$$a_1 \sin\varphi - a_2 \cos\varphi = 0. \tag{1}$$

a_1 nagyságát a forgómozgás alapegyenletéből számolhatjuk ki, felhasználva, hogy a rúd végpontjára $\Theta_A = (1/3)\, mL^2$ és $a_1 = (L/2)\beta$:

$$m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cos\varphi = \frac{1}{3} \cdot m \cdot L^2 \cdot \frac{2a_1}{L}, \tag{2}$$

ahonnan $a_1 = \dfrac{3}{4} \cdot g \cdot \cos\varphi$.

A rúdirányú gyorsulás az ω szögsebességgel kifejezve

$$a_2 = \frac{L}{2}\omega^2.$$

Az energia-tétel alapján

$$mg\frac{L}{2}(1-\sin\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} mL^2 \cdot \omega^2, \text{ ahonnan } a_2 = \frac{3}{2} g(1-\sin\varphi) \tag{3}$$

adódik. Visszahelyettesítve (2)-t és (3)-at, az (1) összefüggésbe, az elválás szögére kapjuk

$$\sin\varphi = 2/3, \qquad \text{azaz} \quad \varphi \approx 42^\circ.$$

A továbbiakban a súlypont sebességének vízszintes összetevője nem változik, megtartja a

$$v_x = \frac{L}{2} \cdot \omega \cdot \sin\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{Lg} \tag{4}$$

értéket. A talajra érkezés pillanatában a súlypont v_s függőleges sebességét az energiamegmaradás tételéből számíthatjuk ki. Mivel az A pontnak nincs függőleges sebessége, ezért a rúdnak $\omega' = \dfrac{v_s}{L/2}$ szögsebességgel kell rendelkeznie. A rúd teljes mozgási energiája a súlypont kinetikus energiája és az $\dfrac{1}{2}\Theta_s \cdot \omega'^2$ forgási energia összegeként áll elő, ahol $\Theta_s = \dfrac{1}{12} mL^2$ a súlypontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_s^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} mL^2 \cdot \left(\frac{2v_s}{L}\right)^2,$$

ahonnan (4) felhasználásával

$$v_s = \sqrt{\frac{2Lg}{3}}$$

adódik.

A földetérés pillanatában tehát az A pont $(1/3)\sqrt{Lg}$ vízszintes, a B pont ugyanekkor vízszintes és $2v_s = \sqrt{\dfrac{8Lg}{3}}$ függőleges sebességgel rendelkezik (a B pont teljes sebessége $5\sqrt{Lg}/3$).

A b) esetben ugyanezeket a lépéseket végigkövetve valamennyi keresett mennyiségre ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az a) esetben.

Bóc István (Bp., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Az energiatétel alkalmazásával tetszőleges φ szöghöz kiszámíthatjuk a súlypont sebességének vízszintes összetevőjét:

$$mg\frac{L}{2}(1-\sin\varphi)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mL^2\omega^2,$$

$$v_x=\frac{L}{2}\omega\cdot\sin\varphi=\sqrt{\frac{3}{4}\cdot L\cdot g\cdot(1-\sin\varphi)\sin^2\varphi}. \tag{5}$$

Ez a függvény φ csökkenésével eleinte növekszik, majd egy maximumhely után csökkenni kezd. Másrészt a függőleges fal csak tolni tudja a rudat, ezért v_x nagysága nem csökkenhet. Az ellentmondás feloldása nyilván az, hogy (5) képlet csak a maximumhelyig érvényes, utána a rúd elválik a függőleges faltól és az összenergiához a haladó mozgás energiája is járulékot ad. A legnagyobb v_x-et az $f(\varphi)=(1-\sin\varphi)\sin^2\varphi$ függvény maximuma határozza meg, ezt viszont az

$$f'(\varphi)=2\sin\varphi\cdot\cos\varphi-3\sin^2\varphi\cos\varphi=0$$

egyenlet megoldásai között kell keresnünk. A $\cos\varphi=0$ és $\sin\varphi=0$ egyenletek a sebességminimumokat adják meg, ezért a maximális sebesség elérését, vagyis a faltól való elválást a

$$\sin\varphi=2/3$$

összefüggés határozza meg.

A megoldás további menete azonos az I. megoldással. A b) esetben a súlypont végig ugyanolyan pályán mozog, mint az a) esetben, az energiatétel mindkét esetben azonos alakú, így a megoldások is megegyeznek.

Kövér András (Debrecen, KLTE Gyak Gimn., IV. o. t.)