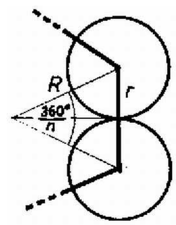
I. megoldás. Célszerű először a geometriai viszonyokat tisztáznunk. Ha n darab r sugarú golyóból szorosan egy szabályos sokszöget rakunk ki, akkor az 1. ábra szerint a golyók középpontjának és a sokszög középpontjának távolsága



1. ábra

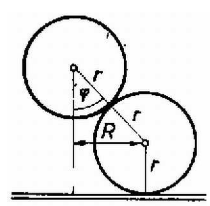
(1) $$R = \frac{r}{\sin\ 180°/n}.$$

A középre helyezett golyó csak akkor támaszkodik a többire, ha

$$R < 2\,r, \qquad \text{vagyis ha} \quad n < 6.$$

Ellenkező esetben valamennyi golyó az asztallapon nyugszik és nyilvánvalóan súrlódás nélkül is egyensúlyban van. Elegendő tehát az $n = 3$, 4 és 5 eseteket vizsgálnunk.

Válasszunk ki egy golyót az alsók közül és rajzoljuk le ezt, valamint a középső golyót oldalnézetből (2. ábra).



2. ábra

A későbbiekben szükségünk lesz a golyók középpontját összekötő egyenes és a függőleges által bezárt φ szög nagyságára. A 2. ábráról leolvasható, hogy

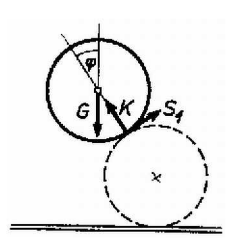
$$\sin\,\varphi = \frac{R}{2r},$$

vagyis (1) felhasználásával

(2) $$\sin\,\varphi = \frac{1}{2 \cdot \sin\ 180°/n}.$$

Ezek után rátérhetünk a feladat fizikai részének megoldására. Merev testek nyugalmi állapotát akarjuk leírni, ennek pedig az a szükséges és elegendő feltétele, hogy a testekre ható erők eredője, valamint a forgatónyomatékok összege nulla legyen. Mivel a rendszer több testből áll, az egyensúly feltételének mindegyik testre külön–külön teljesülnie kell.

Írjuk le először a középső golyó egyensúlyát (3. ábra).



3. ábra

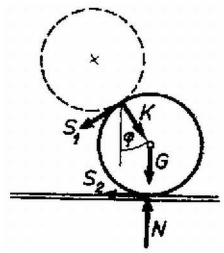
A testre G súlyerő, valamint ismeretlen nagyságú K nyomóerő és S_1 súrlódási erő hat. Az utóbbi két erő természetesen n-szer lép fel, de csak egyet–egyet tüntettünk fel a rajzon. Érdemes az erőket függőleges és vízszintes összetevőkre bontanunk.

A függőleges összetevők egyensúlyának feltétele:

(3) $$G - n(K\ \cos\,\varphi + S_1\ \sin\,\varphi) = 0.$$

A vízszintes összetevők eredője, valamint a forgatónyomatékok összege szimmet-ria–okokból nyilván nulla.

Az asztallapon fekvő golyók mindegyikére a 4. ábrán látható erők hatnak.



4. ábra

A nyomó- és súrlódási erők nagysága Newton III. axiómája értelmében megegyezik a 3. ábrán felvett erők nagyságával. N az asztal nyomóerejének, S_2 az asztallap és a golyó közti súrlódási erőnek a nagyságát jelöli. Az alsó golyók nem hatnak egymásra semmilyen erővel, hiszen a legkisebb nyomóerő eltávolítaná őket egymástól, összeszorító erő hiányában viszont súrlódási erő sem léphet fel. Ismét felírhatjuk a függőleges és vízszintes erőkomponensek egyensúlyának feltételét:

(4) $$K\cos\varphi + S_1\sin\varphi + G - N = 0,$$

(5) $$K\sin\varphi - S_1\cos\varphi - S_2 = 0.$$

A forgatónyomatékok összege bármely pontra vonatkoztatva nulla kell, hogy legyen. A golyó középpontjára felírva:

(6) $$S_1 r - S_2 r = 0.$$

Vigyáznunk kell, a súrlódási erő és a nyomóerő között nem áll fenn az $F_s = \mu F_{ny}$ összefüggés, hiszen a testek nem csúsznak egymáson, hanem az $F_s \leqq \mu\, F_{ny}$ egyenlőtlenség érvényes. Jelen esetben az egyensúly feltételéhez szükséges az

(7) $$S_1 \leqq K, \quad \text{és} \quad S_2 \leqq \mu\cdot N$$

egyenlőtlenségek mindegyikének teljesülése.

A (3)–(6) egyenletrendszer egyértelműen meghatározza az S_1, S_2, K és N ismeretleneket. A megoldás

$$N = \frac{n+1}{n}\,G, \quad K = \frac{1}{n}G, \quad S_1 = S_2 = \frac{G}{n}\,\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

Ezeket (7)-be helyettesítve a

(8) $$\mu \geqq \frac{1}{n+1}\,\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi},$$

illetve a

(9) $$\mu \geqq \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$$

feltételeket kapjuk. Mivel (9) erősebb megszorítást jelent, mint (8), ezért az egyensúly szükséges és elégséges feltétele:

(10) $$\mu \geqq \operatorname{tg}\,(\varphi/2).$$

Az utolsó lépésnél felhasználtuk a

$$\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \equiv \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

trigonometriai azonosságot. (2) alapján $\sin\varphi$-t kifejezhetjük n-nel, így végül n darab golyónál a súrlódási együtthatóra alsó korlátként a

(11) $$\mu_n = 2\cdot\sin\frac{180^\circ}{n} - \sqrt{4\cdot\sin^2\frac{180^\circ}{n} - 1}$$

kifejezést kapjuk. A megfelelő numerikus értékek

$$\mu_3 = \sqrt{3}-\sqrt{2} \approx 0{,}32, \quad \mu_4 = \sqrt{2}-1 \approx 0{,}41, \quad \mu_5 \approx 0{,}56.$$

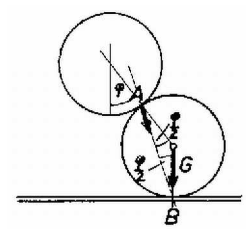
A (11) képlet formálisan érvényes $n=2$ és $n=6$ értékekre is. Az előbbi esetben $\mu_2 = 2-\sqrt{3} = 0{,}27$, de ilyenkor nincs értelme sokszögről beszélni és az egyensúly labilis. $n=6$-ra $\mu_6 = 1$, ami csak akkor helyes, ha valamilyen módon biztosítani tudjuk, hogy a középső golyó ne támaszkodjék az asztalra – hiszen ezt a számítás során kihasználtuk.

Például a középső golyót egy nagyon kicsivel nagyobbra készíthetjük a többinél, vagy pedig egy kicsit horpadt felületre helyezzük a golyókat.

Ábrahám Tibor (Eger, Gárdonyi G. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

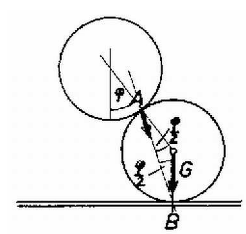
II. megoldás. A feladatot megoldhatjuk szerkesztéssel is. Az asztalon levő bármely golyó akkor van egyensúlyban, ha a rá ható erők eredője nulla és hatásvonaluk egy ponton megy át. Ez utóbbi feltétel a forgatónyomatékok egyensúlyát biztosítja.

A G súlyerő, az asztal nyomóereje és az asztalnál fellépő súrlódási erő egyaránt a B ponton halad át (5. ábra).



5. ábra

Szükséges tehát, hogy a felső golyó által kifejtett erő (nyomóerő+súrlódási erő), amelynek hatásvonala az A ponton biztosan átmegy, szintén a B ponton haladjon át. Ez annyit jelent, hogy az érintkezési felületre merőleges egyenes és az erő hatásvonala $\varphi/2$ szöget zár be. A (7) feltétel szerint viszont az egyensúly feltétele éppen az, hogy ezen szög tangense kisebb legyen, mint μ. Így közvetlenül megkaptuk (10) egyenlőtlenséget.



6. ábra

Az asztal és a golyó között ható erő a 6. ábra alapján biztosan kisebb szöget zár be a függőlegessel, mint $\varphi/2$, ezért a (10) feltétel egyben azt is biztosítja, hogy az asztallapnál sem csúszhatnak meg a golyók.

Prőhle Péter (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A numerikus számítás eredményét összefoglaljuk a következő táblázatban:

n	T	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	μ
2	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=0{,}268$
3	35,2°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=0{,}318$
4	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1=0{,}414$
5	58,7°	$\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{3}$	$\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=0{,}559$
6	90°	1	0	1 =1