Legyen az m_1 tömegű test a t időpillanatban az origótól $x_1(t)$, az m_2 tömegű pedig $x_2(t)$ távolságra. A tömegközéppont koordinátáját jelöljük x_{TK}-val. Mivel a tömegközéppont a két test közötti távolságot a tömegekkel fordított arányban osztja,

(1) $$\frac{x_1(t)-x_{\mathrm{TK}}}{x_{\mathrm{TK}}-x_2(t)}=\frac{m_2}{m_1}.$$

Ebből x_{TK}-t kifejezzük:

(2) $$x_{\mathrm{TK}}=\frac{m_1x_1(t)+m_2x_2(t)}{m_1+m_2}.$$

A tömegközéppont sebessége:

(3) $$v_{\mathrm{TK}}=\frac{\Delta x_{\mathrm{TK}}}{\Delta t}=\frac{m_1\dfrac{\Delta x_1(t)}{\Delta t}+m_2\dfrac{\Delta x_2(t)}{\Delta t}}{m_1+m_2}=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}.$$

A tömegközépponti rendszerben az egyes testek sebessége $u_1=v_1-v_{\mathrm{TK}}$, ill. $u_2=v_2-v_{\mathrm{TK}}$, így az impulzusok összege ebben a rendszerben:

(4) $$I=m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2-(m_1+m_2)v_{\mathrm{TK}}=m_1v_1+m_2v_2-(m_1v_1+m_2v_2)=0.$$

Tehát a tömegközépponti rendszerben az impulzusok összege nulla. A teljes kinetikai energia:

$$W_{\mathrm{kin}}=\frac{1}{2}\,m_1v_1^2+\frac{1}{2}\,m_2v_2^2.$$

Helyettesítsünk ebbe a kifejezésbe v_1 helyébe (u_1+v_{TK})-t, v_2 helyébe pedig (u_2+v_{TK})-t.

$$\begin{aligned}W_{\mathrm{kin}}&=\frac{1}{2}m_1(u_1+v_{\mathrm{TK}})^2+\frac{1}{2}m_2(u_2+v_{\mathrm{TK}})^2=\frac{1}{2}m_1u_1^2+m_1u_1v_{\mathrm{TK}}+\frac{1}{2}m_1v_{\mathrm{TK}}^2+\\&+\frac{1}{2}m_2u_2^2+m_2u_2v_{\mathrm{TK}}+\frac{1}{2}m_2v_{\mathrm{TK}}^2=\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2+(m_1u_1+m_2u_2)v_{\mathrm{TK}}+\\&+\frac{1}{2}\,(m_1+m_2)v_{\mathrm{TK}}^2=W_{\mathrm{kin}}^{(\mathrm{TK})}+\frac{1}{2}\,(m_1+m_2)v_{\mathrm{TK}}^2+I\cdot v_{\mathrm{TK}}.\end{aligned}$$

(4) szerint $I=0$, így

(5) $$W_{\mathrm{kin}}=W_{\mathrm{kin}}^{(\mathrm{TK})}+\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{\mathrm{TK}}^2.$$

Bányai Lajos (Eger, Gárdonyi G. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Több test esetében a tömegközéppont sebessége (3)-hoz hasonlóan

$$U_{x\mathrm{TK}}=\frac{\sum m_iv_{xi}}{\sum m_i}.$$

Továbbra is igaz marad, hogy a tömegközépponti rendszerben az impulzusok összege 0:

$$I=\sum m_iu_i=\sum m_i(v_i-v_{x\mathrm{TK}})=\sum m_iv_i-\left(\sum m_i\right)v_{x\mathrm{TK}}=0.$$

(5) levezetéséhez hasonló módon megkapható az is, hogy

$$W_{\mathrm{kin}}=W_{\mathrm{kin}}^{(\mathrm{TK})}+\frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)v_{x\mathrm{TK}}^2,$$

ahol most $W_{\mathrm{kin}}=\sum\frac{1}{2}\,m_iv_{\mathrm{xi}}^2$.

Eredményeinket általánosíthatjuk arra az esetre is, amikor a tömegpontok nem egyenes mentén mozognak. Ilyenkor a tömegközéppont x koordinátája x_{TK}, y koordinátája $y_{\mathrm{TK}}=\dfrac{\sum m_iy_i}{\sum m_i}$, z koordinátája pedig $z_{\mathrm{TK}}=\dfrac{\sum m_iz_i}{\sum m_i}$. Az y, illetve z irányú sebességre $v_{x\mathrm{TK}}$-val analóg kifejezéseket kapunk. Háromdimenziós mozgás esetén egy test kinetikus energiája $\dfrac{1}{2}\,m\,(v_x^2+v_y^2+v_z^2)$, így az (5)-ös egyenlet kettőnél több test esetére 3-dimenziós mozgást feltételezve

$$W_{\mathrm{kin}}=W_{\mathrm{kin}}^{(\mathrm{TK})}+\frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)(v_{x\mathrm{TK}}^2+v_{y\mathrm{TK}}^2+v_{z\mathrm{TK}}^2).$$

Eredményünknek akkor van jelentősége, amikor igen nagyszámú test, pl. 10^{23} db molekula energiáját vizsgáljuk. Ilyenkor az egyenlet jobb oldalán álló második kifejezés a gáznak mint egésznek a mozgási energiája, $W_{\mathrm{kin}}^{(\mathrm{TK})}$ pedig a gáz belső energiájához ad járulékot. Amennyiben a gázmolekulák között csak rugalmas ütközés történik, $W_{\mathrm{kin}}^{(\mathrm{TK})}$ a teljes belső energia.