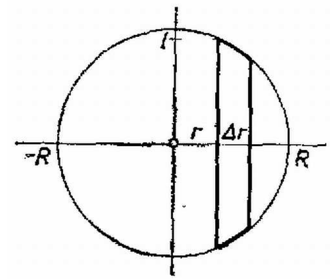
I. megoldás. A labdát olyan gömbhéjnak tekintjük, amelynek vastagsága elhanyagolható és felületegységenkénti tömege μ (1. ábra).



1. ábra

A Δr-hez tartozó gömböv felszíne

$$\Delta A = 2\pi R \Delta r,$$

tömege

$$\Delta m = 2\pi R \Delta r \mu,$$

az r-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka kis Δr mellett

$$\Delta\Theta \approx \Delta m l^2 = 2\pi R \Delta r \mu (R^2 - r^2).$$

Tehát a labda teljes tehetetlenségi nyomatéka

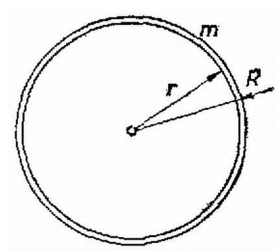
$$\Theta = \int_{-R}^{R} 2\pi R\mu(R^2 - r^2)\mathrm{d}r = 4\pi R\mu \int_{0}^{R} (R^2 - r^2)\mathrm{d}r = \frac{8}{3}\pi R^4 \mu.$$

Figyelembe véve, hogy a gömbhéj tömege $m = 4R^2\pi\mu$,

$$\Theta = \frac{2}{3} m R^2.$$

Nagy Pál (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Legyen a labda sűrűsége ϱ, belső, ill. külső sugara r, ill. R.



2. ábra

A labda tehetetlenségi nyomatéka egy R és egy r sugarú, ϱ sűrűségű tömör gömb tehetetlenségi nyomatékának különbsége. Felhasználva, hogy a tömör gömb tehetetlenségi nyomatéka $(2/5)mr^2$

$$\begin{aligned}\Theta = \Theta_R - \Theta_r &= (2/5)m_R R^2 - (2/5)m_r r^2 = \\ &= (2/5)\cdot(4/3)R^3\pi\varrho R^2 - (2/5)\cdot(4/3)r^3\pi\varrho r^2 = \\ &= (2/5)\cdot(4/3)\pi\varrho(R^5 - r^5).\end{aligned}$$

Fejezzük ki a sűrűséget a labda tömegével:

$$\varrho = \frac{m}{(4/3)\pi(R^3 - r^3)}, \quad \text{így} \quad \Theta = (2/5)m\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Egy elhanyagolható vastagságú gömbhéj tehetetlenségi nyomatéka $r \to R$ határátmenettel adódik:

$$\Theta = \lim_{r\to R} \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} = \lim_{r\to R} \frac{2}{5} m \frac{(R-r)(R^4 + R^3 r + R^2 r^2 + R r^3 + r^4)}{(R-r)(R^2 + Rr + r^2)}, \ \Theta = \frac{2}{3} m R^2.$$

Márkus László (Sopron, Széchenyi I. Ginm., IV. o. t.)

Megjegyzés. A tehetetlenségi nyomaték kiszámítására vonatkozólag l. még *Bodó Zalán* cikkét a K.M.L. XXII. kötet 2. számában.