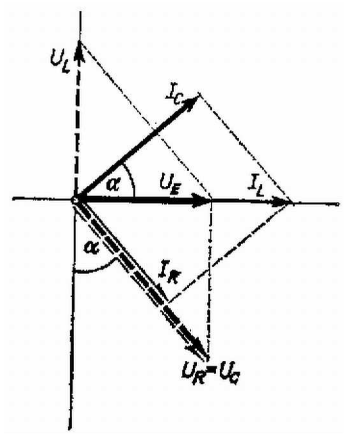
I. megoldás. Rajzoljuk fel a feszültségek és az áramok vektorábráját!



Legyen I_L, a tekercsen átfolyó áram, a viszonyítási alap. Ehhez képest U_L 90°-ot siet. I_R fázisban van U_R-rel, amely egyben a kondenzátor feszültsége is ($U_R = U_C$). I_C 90°-ot siet U_C-hez képest. I_R és I_C összegének a csomóponttörvény értelmében I_L-et kell adnia.

Az ellenállásra, ill. a kondenzátorra eső feszültség:

$$U_R = I_R \cdot R = I_C \cdot X_C. \tag{1}$$

A tekercsre eső feszültség:

$$U_L = I_L \cdot X_L, \text{ ahol} \tag{2}$$

$$I_L^2 = I_C^2 + I_R^2. \tag{3}$$

Ha a tápláló feszültség fázisban van I_L-lel, az I_L-re merőleges feszültségkomponensek összege 0. Ezt az

$$U_L = U_R \cdot \cos\alpha = U_R \cdot (I_C/I_L) \tag{4}$$

egyenlettel fejezhetjük ki.

(2) és (4) összevetéséből:

$$U_R \cdot (I_C/I_L) = I_L \cdot X_L,$$

$$I_L^2 = \frac{U_R I_C}{X_L} = \frac{U_R^2}{X_L \cdot X_C}. \tag{5}$$

(5) és (1) felhasználásával (3) így alakul:

$$\frac{U_R^2}{X_L X_C} = \frac{U_R^2}{X_C^2} + \frac{U_R^2}{R^2},$$

innen

$$R^2 = \frac{X_L X_C^2}{X_C - X_L}.$$

Mivel $X_L = \omega L$ és $X_C = 1/\omega C$,

$$R^2 = \frac{L/\omega C^2}{1/\omega C - \omega L} = \frac{L}{C}\frac{1}{1-\omega^2 LC},$$

így

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2C^2}}.$$

Az L, C és R értékekre tehát teljesülnie kell az $\dfrac{1}{LC} \geqq \dfrac{1}{R^2C^2}$ azaz $R \geqq \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ feltételnek.

Ha $R = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ áll fenn, $\omega = 0$, azaz csak egyenáram esetén lesz „fázisban" a főáramkörben keringő áram a tápláló feszültséggel. Az eredő feszültség

$$U_E = U_R \cdot \cos(90° - \alpha) = U_R \frac{I_R}{I_L} = U_L \frac{I_L}{I_C} \cdot \frac{I_R}{I_L} = I_L X_L \cdot \frac{U_R/R}{U_R/X_C} = \frac{I_L X_L X_C}{R} = \frac{I_L L}{CR}.$$

Az eredő impedancia tehát

$$Z=\frac{U_E}{I_L}=\frac{L}{CR}.$$

Szabó Zoltán (Bp., Apáczai Csere J. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Az egyes áramköri elemek komplex impedanciái: $X_C=1/i\omega C$, $X_R=R$, $X_L=i\omega L$ (ω a generátor körfrekvenciája, $i=\sqrt{-1}$).

Mivel a sorbakapcsolt elemek impedanciái összeadódnak, párhuzamos kapcsolásnál pedig a reciprok impedanciák összege adja az eredő impedancia reciprokát, áramkörünk komplex eredő impedanciája:

$$Z=\frac{1}{1/R+i\omega C}+i\omega L=\frac{1/R-i\omega C}{1/R^2+\omega^2C^2}+i\omega L=\frac{R}{1+R^2\omega^2C^2}+i\frac{\omega L+\omega^3R^2LC^2-R^2\omega C}{1+R^2\omega^2C^2}.$$

A főáramkörben keringő áram akkor lesz fázisban a tápláló feszültséggel, ha Z valós szám, azaz a képzetes része zérus, vagyis

$$\omega L+\omega^3R^2LC^2-R^2\omega C=0.$$

$\omega=0$ esetén egyenáram folyik.
Ha $\omega\neq 0$, akkor kapjuk:

$$R^2LC^2\omega^2+L-R^2C=0.$$

Innen

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{R^2C^2}}.$$

Az eredő impedancia

$$Z=\frac{R}{1+R^2\omega^2C^2}=\frac{R}{1+R^2C^2(1/LC-1/R^2C^2)}=\frac{L}{RC}.$$

Pach János (Bp., Veres Pálné Gimn., IV. o. t.)