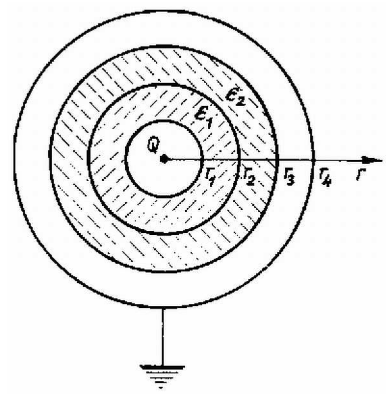


Számoljunk MKSA-rendszerben.

a) Legyen a középponttól r távolságban az eltolásvektor nagysága $D(r)$. Gauss törvényéből

$$D(r) = Q/(4r^2\pi) = \varepsilon\varepsilon_0 E(r), \tag{1}$$

ahol ε_0 a vákuum dielektromos állandója, $E(r)$ az elektromos térerősség, ε a közeg relatív dielektromos állandója. (1)-ből

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad 0 \le r < 0{,}1 \text{ m}, \\ Q/(4r^2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0) = -\ \ 90/r^2(\text{V/m}), & \text{ha} \ \ 0{,}1 \text{ m} \le r < 0{,}2 \text{ m}, \\ Q/(4r^2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0) = -150/r^2(\text{V/m}), & \text{ha} \ \ 0{,}2 \text{ m} \le r < 0{,}3 \text{ m}, \\ Q/(4r^2\pi\varepsilon_0) \quad = -450/r^2(\text{V/m}), & \text{ha} \ \ 0{,}3 \text{ m} \le r < 0{,}4 \text{ m}, \\ 0 & \text{ha} \ \ 0{,}4 \text{ m} \le r. \end{cases}$$

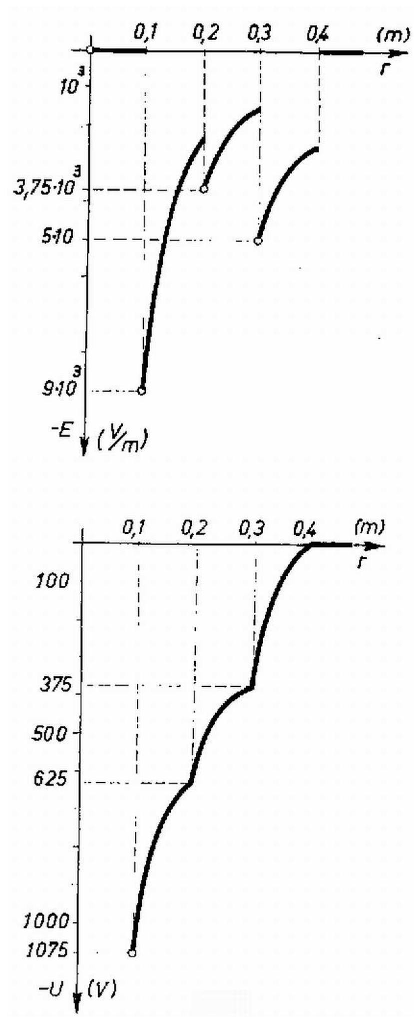
Kihasználtuk, hogy a földelt gömbfelületen $-Q$ (vagyis pozitív!) töltés jelenik meg; ezért lett $D(r) = 0$, ha $r > r_4$. Definíció szerint a potenciálfüggvény:

$$U(r) = -\int_{r_4}^{r} E(r)\,\mathrm{d}r = \begin{cases} 0 & \text{ha} \ \ r_4 \le r, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_4}\right), & \text{ha} \ \ r_3 \le r < r_4, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{r_3} - \dfrac{1}{r_4} - \dfrac{1}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_3}\right)\right], & \text{ha} \ \ r_2 \le r < r_3, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{r_3} - \dfrac{1}{r_4} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_3}\right) + \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_2}\right)\right], & \text{ha} \ \ r_1 \le r < r_2, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{r_3} - \dfrac{1}{r_4} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_3}\right) + \dfrac{1}{\varepsilon_1}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)\right], & \text{ha} \quad 0 \le r < r_1. \end{cases}$$

Ugyanez számszerűen:

$$U(r) = \begin{cases} -1075 \text{ (V)}, & \text{ha} \ \ 0 \le r < 0{,}1 \text{ m}, \\ -90/r - 175 \text{ (V)}, & \text{ha} \ \ 0{,}1 \text{ m} \le r < 0{,}2 \text{ m}, \\ -150/r + 125 \text{ (V)}, & \text{ha} \ \ 0{,}2 \text{ m} \le r < 0{,}3 \text{ m}, \\ -450/r + 1125 \text{ (V)}, & \text{ha} \ \ 0{,}3 \text{ m} \le r < 0{,}4 \text{ m}, \\ 0 \text{ V} & \text{ha} \ \ 0{,}4 \text{ m} \le r. \end{cases}$$

A számítás során a potenciális energia nullnívóját a középponttól r_4 távolságban vettük fel. Az 1. ábrán jól látható, hogy a térerősség függvénynek a dielektrikumok határánál szakadása van, a potenciálfüggvénynek pedig töréspontja.



1. ábra

b) A belső fémgömb töltése Q, felületén a töltéssűrűség

$$\sigma_1 = Q/(4\pi r_1^2) = -3{,}9 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C\,m^{-2}}.$$

Az ε_1 dielektromos állandójú szigetelő belső felületén $-Q(1-1/\varepsilon_1)$, külső felületén $Q(1-1/\varepsilon_1)$ polarizációs töltés jelenik meg, ami a belső felületen

$$\sigma_2 = -Q(1-1/\varepsilon_1)/(4\pi r_1^2) = 3{,}1 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C\,m^{-2}},$$

a külsőn pedig

$$\sigma_2' = Q(1-1/\varepsilon_1)/(4\pi r_2^2) = -7{,}9 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C\,m^{-2}}$$

töltéssűrűséget hoz létre. Hasonlóan az ε_2 dielektromos állandójú közeg belső és külső felületén a töltéssűrűség rendre

$$\sigma_3 = -Q(1-1/\varepsilon_2)/(4\pi r_2^2) = 6{,}6 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C\,m^{-2}}\ \text{és}$$
$$\sigma_3' = Q(1-1/\varepsilon_2)/(4\pi r_3^2) = -2{,}9 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C\,m^{-2}}.$$

A külső fémfelületen a töltéssűrűség

$$\sigma_4 = -Q/(4\pi r_4^2) = 2{,}5 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C\,m^{-2}}.$$

c) A rendszer kapacitása

$$C = Q/U(r_1) = 4\pi\varepsilon_0/\big[1/r_3 - 1/r_4 + (1/r_2 - 1/r_3)/\varepsilon_2 +$$
$$+ (1/r_1 - 1/r_2)/\varepsilon_1\big] = 46\ \mathrm{pF}.$$

d) A térfogatban foglalt teljes energia:

$$W = (1/2)QU(r_1) = 2{,}7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}.$$

e) Az energiasűrűség:

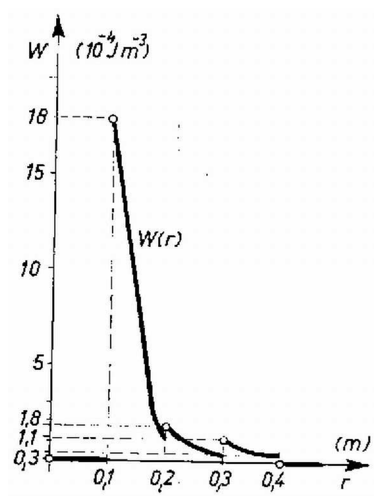
$$w(r) = (1/2)E(r)D(r) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \le r < r_1, \\ Q^2/(32r^4\pi^2\varepsilon_1\varepsilon_0), & \text{ha } r_1 \le r < r_2, \\ Q^2/(32r^4\pi^2\varepsilon_2\varepsilon_0), & \text{ha } r_2 \le r < r_3, \\ Q^2/(32r^4\pi^2\varepsilon_0), & \text{ha } r_3 \le r < r_4, \\ 0 & \text{ha } r_4 \le r. \end{cases}$$

ill. számszerűen:

$$w(r) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \le r < 0{,}1 \text{ m, vagy } 0{,}4 \text{ m} \le r, \\ 1{,}8 \cdot 10^{-7}/r^4 (\text{J m}^{-3}), & \text{ha } 0{,}1 \text{ m} \le r < 0{,}2 \text{ m}, \\ 2{,}9 \cdot 10^{-7}/r^4 (\text{J m}^{-3}), & \text{ha } 0{,}2 \text{ m} \le r < 0{,}3 \text{ m}, \\ 8{,}9 \cdot 10^{-7}/r^4 (\text{J m}^{-3}), & \text{ha } 0{,}3 \text{ m} \le r < 0{,}4 \text{ m}. \end{cases}$$

A 2. ábrán látszik, hogy az energiasűrűség a középponttól távolodva rohamosan csökken (r^{-4}-nel arányosan).

Balog János (Bp., I. István Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján



2. ábra

Megjegyzések. **1.** A rendszer energiáját az energiasűrűségből is kiszámolhatjuk:

$$W = \int_V w \, \mathrm{d}V = \int_{r_1}^{r_4} w(r) 4r^2\pi \, \mathrm{d}r.$$

2. Gondoljunk a szigetelők határfelületén vékony vezető réteget. Az elektrosztatikai viszonyok változatlanok maradnak, mert e felületek ekvipotenciálisak. A rendszer kapacitását így három sorosan kötött gömbkondenzátor kapacitásának eredőjeként kapjuk:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \Bigg/ \left[\frac{r_4 - r_3}{r_3 r_4} + \frac{r_3 - r_2}{\varepsilon_2 r_2 r_3} + \frac{r_2 - r_1}{\varepsilon_1 r_1 r_2} \right].$$