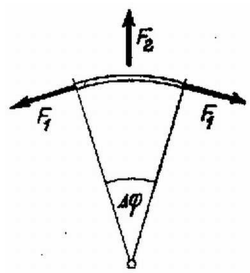
**I. megoldás.** A gumigyűrű addig fog növekedni, amíg a felületi feszültségből származó erő és a rugalmas erők egyensúlyba nem kerülnek.

Jelöljük az egyensúlyi helyzethez tartozó sugarat $r$-rel és vizsgáljuk a gyűrű $\Delta\varphi$ középponti szögű darabját!




A gumi relatív megnyúlása $\dfrac{2\pi(r-r_0)}{2\pi r_0}$, ennek megfelelően a vizsgált darab mindkét végén $F_1 = \dfrac{r-r_0}{r_0} EA$ nagyságú, érintő irányú erő lép fel. Ezek eredője, ha a $\Delta\varphi$ szöget elegendően kicsire választjuk

$$2F_1 \sin \Delta\varphi/2 \approx F_1 \cdot \Delta\varphi \text{ nagyságú.}$$

Mivel a hártyának két szabad felülete van, a felületi feszültségből származó erő

$$F_2 = 2\,\sigma r \cdot \Delta\varphi.$$

Az egyensúly feltétele $F_2 = F_1 \cdot \Delta\varphi$, vagyis

$$\frac{r-r_0}{r_0}\, EA \cdot \Delta\varphi = 2\,\sigma r \cdot \Delta\varphi.$$

Ennek megoldása

$$r = \frac{r_0}{1-2\,\sigma r_0/EA}.$$

A megoldás során kihasználtuk a Hook–törvényt, amely azonban csak kis megnyúlásokra érvényes. Jelen esetben ennek feltétele: $r - r_0 \ll r_0$, ami akkor teljesül, ha $\dfrac{\sigma r_0}{EA} \ll 1$. Felhasználva a kicsiny $x$-re érvényes $\dfrac{1}{1-x} \approx 1 + x$ összefüggést, eredményünket

$$r = r_0 \left(1 + \frac{2\,\sigma r_0}{EA}\right)$$

alakban írhatjuk fel.

*Kövér András* (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., IV. o. t.)

**II. megoldás.** A gumikarika sugara addig fog növekedni, amíg a rendszer potenciális energiája minimális nem lesz. Ez az energia egyrészt a folyadékfelszín energiájából, másrészt a rugalmas energiából adódik. Ha az energiákat a kiindulási helyzetben nullának választjuk, akkor a folyadék két szabad felületének energiája $r$ sugarú gyűrűnél

$$E_1(r) = 2\,\sigma(r_0^2 - r^2)\pi.$$

A gumiszál megnyúlása $\Delta l = 2\pi(r - r_0)$, az egységnyi megnyúlásnál fellépő direkciós erő $k = \dfrac{EA}{2\pi r_0}$, a rugalmas energia

$$E_2(r) = \frac{1}{2}\, k(\Delta l)^2 = \frac{EA(r-r_0)^2\pi}{r_0}.$$

A teljes energia $E(r) = E_1(r) + E_2(r)$ a sugár másodfokú függvénye, mely minimumát az

$$r = \frac{r_0}{1-2\,\sigma r_0/EA}$$

értékénél veszi fel.

*Szabó Zoltán* (Bp., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

*Megjegyzés.* A megoldók többsége az energiamegmaradásra hivatkozva az $E_1 + E_2 = 0$ egyenlőséget írta fel és az

$$r = r_0\,\frac{EA + 2\,\sigma r_0}{EA - 2\,\sigma r_0} \approx r_0 \left(1 + \frac{4\,\sigma r_0}{EA}\right)$$

eredményt kapta. Ez csak akkor lenne helyes, ha a rendszer összes mechanikai energiája állandó maradna. A valóságban azonban a gumigyűrű és vele együtt a folyadékhártya erősen csillapított rezgő mozgást végez, miközben a mechanikai energia részben hővé alakul. Hasonló a helyzet egy megfeszített, majd elengedett rugó egyensúlyi helyzetének meghatározásához. A kezdő pillanat helyzeti energiája nyilván nem az egyensúlyi helyzet, hanem a túloldali legnagyobb kitérés potenciális energiájával egyezik meg.