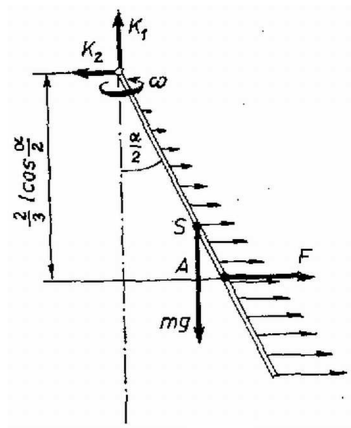
Vizsgáljuk meg a mozgást a rúddal együtt forgó koordinátarendszerből! Ebben a rendszerben a rúd egyensúlyban van, tehát a ráható erők eredőjének és a forgatónyomatékok összegének nullának kell lennie.

Határozzuk meg a fellépő erők nagyságát és hatásvonalát! A rúd súlyát a súlypontban ható mg nagyságú erővel vehetjük figyelembe. A csuklóban ébredő erő iránya és nagysága ismeretlen, hatásvonala azonban át kell, hogy menjen a csuklón, mivel erre a pontra vonatkoztatott forgatónyomatéka nulla. Ezt az erőt az 1. ábrán látható K_1 és K_2 összetevőivel helyettesíthetjük.



1. ábra

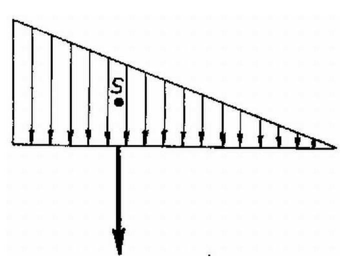
Hátra van még a centrifugális erő meghatározása. Bontsuk fel a rudat egyenlő hosszúságú kis darabokra. A csuklótól x távolságra elhelyezkedő Δm tömegű rúddarabra

$$\Delta F = \Delta m \cdot \omega^2 \cdot x \sin(\alpha/2)$$

nagyságú centrifugális erő hat. Mivel ΔF egyenesen arányos x-szel, egyenletesen növekvő nagyságú párhuzamos erők eredőjét kell meghatároznunk. Az eredő nagysága nyilván az átlagos x-szel számolt

$$F = m \cdot (l/2) \cdot \omega^2 \sin(\alpha/2).$$

A hatásvonal azonban nem a súlyponton, hanem a rúd alsó harmadolópontján megy keresztül. Ezt azért állíthatjuk, mert a szóban forgó lineárisan növekvő párhuzamos erőket egy – azonos szélességű darabokra felszeletelt – derékszögű háromszög részeire ható súlyerőknek tekinthetjük, amelyeknek eredője a háromszög súlypontján megy keresztül (2. ábra).



2. ábra

A fentiek alapján az erők és a forgatónyomatékok egyensúlyát az

$$m(l/2)\omega^2 \sin(\alpha/2) - K_2 = 0,$$
$$mg - K_1 = 0,$$
$$(2/3)lm(l/2)\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) - mg(l/2)\sin(\alpha/2) = 0$$

egyenletrendszer írja le, melynek megoldása

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l\cos(a/2)}}.$$

A keringési idő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2l\cos(\alpha/2)}{3g}}.$$

A csuklóban ható erő:

$$K=\sqrt{K_1^2+K_2^2}=mg\sqrt{1+\frac{9}{16}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Lukács Gábor (Bp., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., III. o. t.)
és *Gulyás Ferenc* (Csongrád, Batsányi J. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Több megoldó egymásra merőlegesen lengő síkingák mozgásából próbálta összetenni a tényleges körmozgást. A rúd végpontja egy gömb felületén mozoghat, ez pedig csak nagyon kis α értékeknél helyettesíthető körlappal. Így érthető, hogy az l hosszúságú rúd által alkotott fizikai inga $T=2\pi\sqrt{2l/3g}$ lengésideje is csak az $\alpha\approx 0$ határesetben egyezik meg a fenti feladat megoldásával.

2. A megoldók többsége a centrifugális erők eredőjét a súlypontba helyezte, és így a hibás $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l\,\cos(\alpha/2)}{2g}}$ eredményt kapta.

3. A végeredményből látszik, hogy a csuklóban ébredő erő nem rúdirányú, hanem a súlyerő és a centrifugális erő hatásvonalának A metszéspontján megy keresztül.