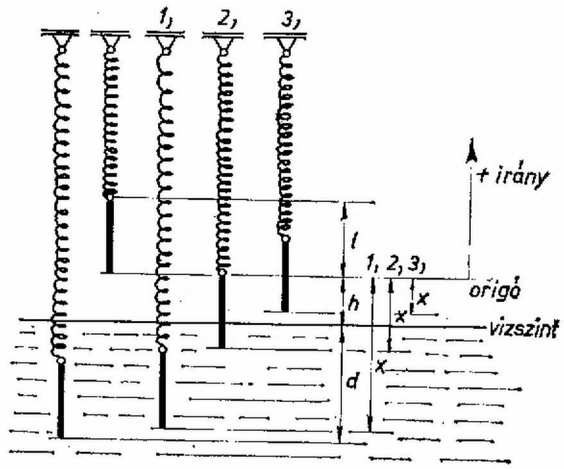
A pálcára ható nehézségi erőt, valamint az ezzel egyensúlyt tartó rugóerőt a feladat szempontjából figyelmen kívül hagyhatjuk, ha koordinátarendszerünk kezdőpontját abba a pontba helyezzük, amelyet a pálca alsó vége nyugalmi helyzetben (a vízszintes felett h magasságban) elfoglal, és a rugó megnyúlását ettől az origótól mérjük.

A pálca mozgását három szakaszra bonthatjuk. Az első szakaszban $\big(x < -(h+l)\big)$ a pálca teljes egészében a vízbe merül, a másodikban $\big(-(h+l) < x < -h\big)$ történik a kiemelkedés, majd a harmadik szakaszban $(-h < x)$ végig a vízszint felett van. E három szakasz az egész mozgás fél periódusát alkotja (1. ábra).



1. ábra

Az egyes szakaszokban a pálcára ható erő:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= D_x + a\gamma l = -D(x - x_1),\\
F_2 &= -Dx - A\gamma(x+h) = -(D + A\gamma)(x - x_2),\\
F_3 &= -Dx,
\end{aligned}
$$

ahol γ a víz fajsúlya.

A pálca tehát mindhárom esetben harmonikus rezgőmozgást végez. A rezgések körfrekvenciái és a rezgéscentrumok koordinátái:

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \sqrt{\frac{D}{m}}, & x_1 &= \frac{A\gamma l}{D},\\
\omega_2 &= \sqrt{\frac{D + A\gamma}{m}}, & x_2 &= -\frac{A\gamma h}{D + A\gamma},\\
\omega_3 &= \sqrt{\frac{D}{m}}, & x_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Az indítási helyzetnek megfelelően az első rezgés amplitúdója

$$A_1 = h + d + x_1.$$

Felhasználva azt, hogy a határhelyzetekben ($x = -(h+l)$, ill. $x = -h$) a sebesség nem változik ugrásszerűen, a másik két rezgés amplitúdója is kiszámítható. A sebesség abszolút értéke a hely függvényében

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) + x_0 \text{ alapján,}$$

$$v = A\,\omega|\cos(\omega t + \varphi)| = A\omega\sqrt{1 - \left(\frac{x - x_0}{A}\right)^2} = \omega\sqrt{A^2 - (x - x_0)^2}.$$

Az első határhelyzetben $(x = -h - l)$ a sebesség:

$$v_h = \omega_1\sqrt{A_1^2 - (h + l + x_1)^2} = \omega_2\sqrt{A_2^2 - (h + l + x_2)^2},$$

a második határhelyzetben $(x = -h)$

$$v_h' = \omega_2\sqrt{A_2^2 - (h + x_2)^2} = \omega_3\sqrt{A_3^2 - (h + x_3)^2}.$$

A_1 ismeretében tehát a további amplitudók

$$A_2 = \frac{1}{\omega_2}\sqrt{\omega_1^2 A^2 - \omega_1^2(h+l+x_1)^2 + \omega_2^2(h+l+x_2)^2},$$
$$A_3 = \frac{1}{\omega_3}\sqrt{\omega_2^2 A_2^2 - \omega_2^2(h+x_2)^2 + \omega_3^2(h+x_3)^2},$$

Ha az időt a pálca elengedésétől mérjük, az első rezgés fázisszöge $\varphi_1 = \pi/2$. A kiemelkedés kezdetéig t_1 idő telik el, ekkor a pálca alsó pontjának koordinátája:

$$x(t_1) = (h+l) = A_1 \sin(\omega_1 t_1 - \pi/2) + x_1,$$

ahonnan

$$t_1 = \frac{1}{\omega_1}\left[\frac{\pi}{2} - \text{arc } \sin\frac{x_1+h+l}{A_1}\right],$$

A t_1 időpontban a második rezgésre is teljesülnie kell a

$$-(h+l) = A_2 \sin(\omega_2 t_1 + \varphi_2) + x_2$$

egyenlőségnek, tehát:

$$\varphi_2 = \left(-\text{arc sin}\frac{x_2+h+l}{A_2}\right) - \omega_2 t_1 = \text{arc sin}\frac{x_2+h+l}{A_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc sin}\frac{x_1+h+l}{A_1}\right).$$

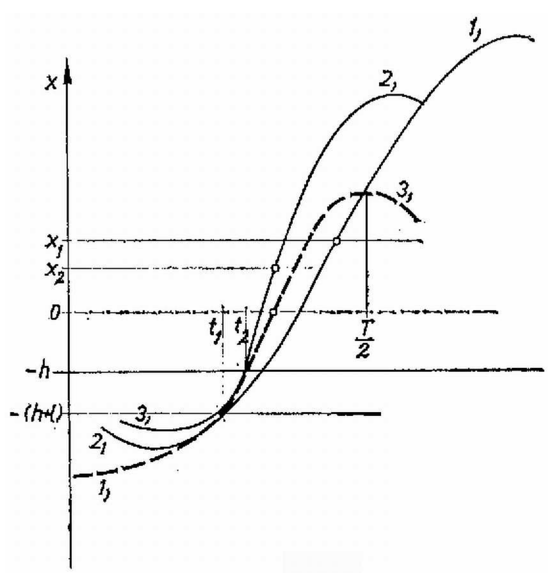
A harmadik rezgés fázisszögét –az előbbivel azonos gondolatmenettel – a következő egyenletekből lehet meghatározni:

$$-h = A_2 \sin(\omega_2 t_2 + \varphi_2) + x_2,$$
$$-h = A_3 \sin(\omega_3 t_2 + \varphi_3) + x_3.$$

ahonnan

$$t_2 = \frac{1}{\omega_2}\left[-\left(\text{arc sin}\frac{x_2+h}{A_2}\right) - \varphi_2\right],$$
$$\varphi_3 = \left(-\text{arc sin}\frac{x_3+h}{A_3}\right) - \omega_3 t_2.$$

A pálca mozgásának fél periódusa tehát a különböző intervallumokban az alábbi három rezgőmozgásból tevődik össze (2. ábra):



2. ábra

$$\left.\begin{array}{l}-(h+d) < x < -(h+l)\\ 0 < t < t_1\end{array}\right\} \qquad x = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + x_1,$$

$$\left.\begin{array}{l}-(h+l) < x < -h\\ t_1 < t < t_2\end{array}\right\} \qquad x = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + x_2,$$

$$\left.\begin{array}{l}-h < x < A_3\\ t_2 < t < T/2\end{array}\right\} \qquad x = A_3 \sin(\omega_2 t + \varphi_3) + x_3.$$

Fél periódus elteltével a pálca eljut mozgásának legmagasabb pontjába, az $x = A_3$ pontba:

$$A_3 = A_3 \sin\left(\omega_3 \frac{\pi}{2} + \omega_3\right) + x_3.$$

Az $x_3 = 0$ egyenlet ismeretében az eredő mozgás periódusideje a következő egyszerű alakban fejezhető ki:

$$T = \frac{2}{\omega_3}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_3\right).$$

Szabó Zoltán (Bp., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., IV. o. t.)
Tegze Miklós (Bp., Kölcsey F. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Az amplitúdók értéke az energiamegmaradás tételének felhasználásával is kiszámítható. Ha a nehézségi erőt és a vele egyensúlyt tartó rugóerőt – a fenti gondolatmenetnek megfelelőn – nem vesszük figyelembe, akkor a nehézségi erőtérből származó potenciális energiával sem szabad számolnunk. Ugyanakkor nem szabad megfeledkezni a víz energiájának megváltozásáról, azaz a felhajtóerő munkájáról.