

Legyen az i -edik folyadékmennyiség térfogata $t_0 = 0$ hőmérsékleten V_{i0} . Akkor $V_i = V_{i0} \cdot (1 + \beta \cdot t_i)$. Ha a V_i térfogatú folyadékot a keverés utáni t közös hőmérsékletre hűtjük (vagy melegítjük), a folyadék térfogatváltozása $V'_i - V_i = \Delta V_i = V_{i0} \beta (t - t_i)$. Így az egész folyadék térfogatváltozása az összekeverés során

$$\Delta V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n V_{i0} \beta (t - t_i) = \beta \sum_{i=1}^n V_{i0} (t - t_i),$$

ahol β a folyadék $t_0 = 0$ -ra vonatkoztatott hőtágulási együtthatója.

Számítsuk ki t értékét! Feltételezzük, hogy az összekeverés során nem végzünk munkát a folyadékokon, tehát az egyes folyadékrészek által felvett hőmennyiségek előjeles összege 0:

$$\sum_{i=1}^n c m_i (t - t_i) = 0, \quad m_i = V_{i0} \rho_0,$$

ahol ρ_0 a folyadék sűrűsége $t_0 = 0$ fokon. Ezért

$$\sum_{i=1}^n c V_{i0} \rho_0 (t - t_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n V_{i0} (t - t_i) = 0.$$

Ezt behelyettesítve ΔV kifejezésébe, azt kapjuk, hogy $\Delta V = 0$. Ezzel az állítást igazoltuk.

Matajsz István (Gyula, Erkel F. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Sok megoldó hibás úton próbálta bebizonyítani az állítást. Kiindulásuk általában az volt, hogy az i -edik folyadék térfogata a keverés után $V'_i = V_i [1 + \beta(t - t_i)]$, így a keverés utáni össztérfogat

$$V'_\sigma = \sum V_i [1 + \beta(t - t_i)] = \sum V_i + \sum \beta V_i (t - t_i).$$

Ez a kiindulás azért helytelen, mert a β függ attól, hogy milyen hőmérsékletre vonatkozik. Az, hogy a megoldóknak így is sikerült „igazolni” az állítást, egy másik figyelmetlenség eredménye. Ugyanis a továbbiakban a

$\Delta Q = \sum c \rho \cdot V_i (t - t_i) = 0$ egyenletet használták. Ez azért nem helyes, mert itt ρ vonatkozik t_i -re, tehát minden i -re más és más.

Az első képlet helyesen

$$V'_i = V_i \left[1 + \frac{\beta_0}{1 + \beta_0(t_i - t_0)} (t - t_i) \right],$$

azaz

$$V'_\sigma = \sum V_i + \sum \frac{\beta_0 V_i}{1 + \beta_0(t_i - t_0)} (t - t_i).$$

A Q -ra vonatkozó pedig

$$\Delta Q = \sum c \frac{\rho_0 V_i}{1 + \beta_0(t_i - t_0)} (t - t_i).$$

Ezekben a kifejezésekben β_0 és ρ_0 már valóban azonosak minden folyadékmennyiségre. Tényleg ki lehet emelni őket az összegzés jele elé. A hibás kiindulás csak azért vezetett, jó eredményre, mert β is és ρ is ugyanúgy függ a hőmérsékleti alappont megválasztásától.