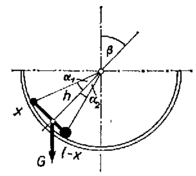
Könnyen belátható, hogy a súlyzó csak akkor lehet egyensúlyban, ha a tengelyét és a gömb középpontját tartalmazó sík függőleges.

Jellemezzük a súlyzó helyzetét a súlypontját a gömb középpontjával összekötő egyenesnek a függőlegessel bezárt β szögével! Az 1. ábrán látható α_1, α_2, h értékek m_1, m_2, m_3, l és r ismeretében a súlypont definíciójának felhasználásával meghatározhatók.



1. ábra

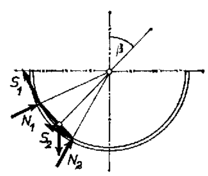
Ha

$$x = l\,\frac{m_1 + m_3/2}{m_1 + m_2 + m_3}$$

akkor a súlyzó súlypontjának a félgömb középpontjától mért távolsága

$$h = \sqrt{r^2 + x^2 - lx}, \quad \text{továbbá} \quad \cos\alpha_1 = \frac{2r^2 - lx}{2rh}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{2r^2 - l(l-x)}{2rh}.$$

A 2. ábrán felrajzoltuk a súlyzóra ható erőket.



2. ábra

Az egyensúly feltétele: az erők összege és a forgatónyomatékok összege nulla.

$$N_1\,\sin(\beta+\alpha_1) - S_1\,\cos(\beta+\alpha_1) + N_2\,\sin(\beta-\alpha_2) - S_2\,\cos(\beta-\alpha_2) = 0, \tag{1}$$

$$N_1\,\cos(\beta+\alpha_1) + S_1\,\sin(\beta+\alpha_1) + N_2\,\cos(\beta-\alpha_2) + S_2\,\sin(\beta-\alpha_2) - G = 0, \tag{2}$$

$$S_1 r + S_2 r - Gh\,\sin\beta = 0, \tag{3}$$

ha $G = m_1 g + m_2 g + m_3 g$.

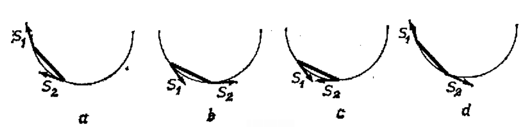
Az S_1 és S_2 súrlódási erőkről csak annyit tudunk, hogy nagyságuk

$$|S_1| \le \mu N_1, \qquad (4) \qquad\qquad S_2| \le \mu N_2. \qquad (5)$$

A (4) és (5) feltételt kielégítő, egyébként tetszőlegesen megválasztott súrlódási erőket az (1), (2), (3) egyenletrendszerbe helyettesítve megkapjuk a súlyzó egy lehetséges egyensúlyi helyzetét. Láthatjuk tehát, hogy az egyensúlyi helyzet nem pontosan határozott. Bizonyos azonban, hogy (4), (5)-nek megfelelően a súrlódási erők nagysága legfeljebb $|S_1| = \mu N_1$, $|S_2| = \mu N_2$ lehet. Attól függően, hogy a súrlódási erők iránya a 2. ábrán berajzolttal egyezik vagy ellentétes, a fenti két egyenlőség alapján a következő egyenletpárokat kaphatjuk:

$$S_1 = \mu N_1, \quad (4a) \qquad -S_1 = \mu N_1, \quad (4b) \qquad -S_1 = \mu N_1, \quad (4c) \qquad S_1 = \mu N_1, \quad (4d)$$
$$S_2 = \mu N_2, \quad (5a) \qquad -S_2 = \mu N_2, \quad (5b) \qquad S_2 = \mu N_2, \quad (5c) \qquad -S_2 = \mu N_2, \quad (5d)$$

(A 3. ábrán feltüntettük a súrlódási erők valódi irányát mind a négy esetben.)



3. ábra

Az a), b), c), d) egyenletpárok bármelyikét is csatoljuk az (1), (2), (3) egyenletekhez, ötismeretlenes egyenletrendszert kapunk, melyet a matematikai nehézségek leküzdése után β-ra megoldhatunk.

Végeredményben az $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ jelöléssel:

$$\operatorname{ctg}\beta_a=\frac{(h/\mu r)(1-\mu^2)\sin^2\alpha+(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)\sin\alpha+(\cos\alpha_2+\cos\alpha_1)(1-\cos\alpha)\mu}{(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)\sin\alpha+(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)(1-\cos\alpha)\mu},$$

$$\operatorname{ctg}\beta_b=-\frac{(h/\mu r)(1-\mu^2)\sin^2\alpha+(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)\sin\alpha+(\cos\alpha_2+\cos\alpha_1)(1-\cos\alpha)\mu}{(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)\sin\alpha+(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)(1-\cos\alpha)\mu},$$

$$\operatorname{ctg}\beta_c=\frac{(l/\mu r)\dfrac{\mu^2(1+\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha-2\mu\cos\alpha\sin\alpha}{\mu(\cos\alpha-1)-\sin\alpha}-\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2},$$

$$\operatorname{ctg}\beta_d=\frac{(l/\mu r)\dfrac{\mu^2(1+\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha+2\mu\cos\alpha\sin\alpha}{\mu(\cos\alpha-1)+\sin\alpha}-\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2},$$

A súlyzó két szélső helyzetét nem túl nagy μ esetén β_a és β_b határozza meg. β_b negatív előjele kifejezi azt, hogy ekkor a súlyzó a 2. ábrán láthatóval ellentétes oldalon van. Ellenőrizhetjük, hogy a kapott eredmény egyes speciális esetekben ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha=0$, $\alpha_1=\alpha_2$, $\mu=0$) is helyes értéket ad.

β_d-ből – mint az a 3d ábra alapján várható volt – semmi érdekes következtetést sem tudunk levonni. Érdemes megfigyelni, hogy amennyiben $\mu(\cos\alpha-1)=\sin\alpha$, akkor a c) esetben β_c értéke független a súlypont helyzetétől. Ez annak felel meg, hogy a súlyzó beszorul a gömbbe, aminek feltétele egyszerűbb alakban:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\mu.$$

Ha tehát a súrlódási tényező eléggé nagy, akkor a súlyzó bárhol egyensúlyban lehet. A fenti eredmény hasonló az ék vizsgálatánál kapott feltételhez.

Megjegyzés. Sok megoldó abból a feltevésből indult ki, hogy $S=\mu mg\cos\alpha$, ami csak egyes speciális esetekben igaz. Általában célszerű a fentihez hasonló gondolatmenettel egyenletrendszert felállítani.

Voltak, akik csak az egyenleteket írták fel, és nem is próbálkoztak azok megoldásával. Így a feladat megoldásának nagyon tanulságos részét mulasztották el.

Senki sem vette észre, hogy a súlyzó beszorulhat a gömbbe.