Ha a zérus potenciálú felületet földelt fémlemezzel helyettesítjük, az erőtérben semmi sem változik, hiszen a földelt fémlemez potenciálja zérus. Ezért a térerősség ugyanakkora marad, mint a fémlemez odahelyezése előtt volt.

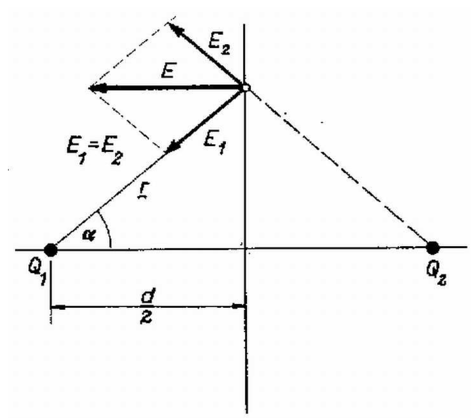
Vegyük fel a koordinátarendszer origóját a Q_1 töltés helyén. Q_2 koordinátái legyenek: $(0, d, 0)$. Határozzuk meg azon $P\ (x, y, z)$ pontok mértani helyét, melyekre a potenciál értéke zérus! A

$$\frac{Q_1}{(x^2+y^2+x^2)^{1/2}} + \frac{Q_2}{\left[x^2+(y-d)^2+z^2\right]^{1/2}} = 0 \tag{1}$$

egyenletet nyerjük, melyből $x^2+y^2+z^2=r^2$ és $k = \left|\frac{Q_2}{Q_1}\right|$ jelöléssel a zérus potenciálú felület egyenlete:

$$(1-k^2)r^2 = d(2y-d). \tag{2}$$

a) $Q_1 = -Q_2$, tehát $k = 1$. A zérus potenciálú felület az $y = d/2$ sík.



1. ábra

Az 1. ábra alapján a térerősség:

$$E = 2E_1\cos\alpha = 2E_1\cdot\frac{d}{2r} = E_1\cdot\frac{d}{r}. \tag{3}$$

$$\text{Mivel } E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}, \tag{4}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 d}{r^3}. \tag{5}$$

A felületi töltéssűrűség definíció szerint:

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{1}{4\pi}\frac{Q_1 d}{r^3}. \tag{6}$$

A feladat számadataival (ha r-et méterben mérjük):

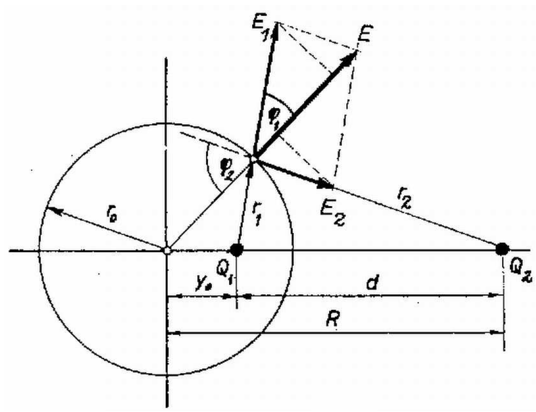
$$E = \frac{90}{r^3}\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right], \quad \text{és} \quad \sigma \approx \frac{8\cdot 10^{-10}}{r^3}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

b) A zérus potenciálú felület egyenlete $Q_1 \neq -Q_2$ esetben:

$$x^2 + \left(y\frac{d}{1-k^2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{kd}{k^2-1}\right)^2.$$

Ez a felület tehát egy gömb, melynek középpontja az $O\left(0, \frac{d}{1-k^2}, 0\right)$ pontban van, sugara: $r_0 = \frac{kd}{k^2-1}$ $\left(\text{a feladat számadataival: } O\left(0, -\frac{1}{15}, 0\right) \text{ és } r_0 = \frac{4}{15}\right)$.

Határozzuk meg a térerősség nagyságát egy olyan körön, amelyet egy – a két töltésen átmenő – sík metsz ki a gömbből! Vegyük figyelembe, hogy az erő vonalak az ekvipotenciális felületre merőlegesek, és helyezzük a koordinátarendszer origóját a gömb középpontjába!



2. ábra

A 2. ábra alapján

(8) $$E = E_1 \cos\varphi + E_2 \cos\varphi_2 .$$

Cosinus – tétellel $\cos\varphi_1$ és $\cos\varphi_2$ kifejezhető:

(9) $$\cos\varphi_1 = \frac{r_0^2 + r_1^2 - y_0^2}{2r_0 r_1},$$

(10) $$\cos\varphi_2 = \frac{R_0^2 + r_0^2 - y_2^2}{2r_0 r_2},$$

Felhasználva a (8) – (10), továbbá a $kr_1 = r_2$, $kQ_1 = Q_2$ és $ky_0 = r_0$ összefüggéseket:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2^3}\frac{1}{2r_0}\left\{k^2(r_0^2 + r_1^2 - y_0^2) + R^2 - r_0^2 - r_2^2\right\} =$$

(11) $$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2^3}\frac{1}{2r_0}\left\{(k^2 - 1)r_0^2 + R^2 - k^2 y_0^2\right\}.$$

Vegyük figyelembe még, hogy $kr_0 = R$ 'es $R = d + y_0$. Ezzel

(12) $$E = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(d + y_0)^2 - r_0^2}{r_0}\right]\frac{1}{r_2^3}$$

adódik. A felületi töltéssűrűség

(13) $$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{Q_2}{4\pi}\left[\frac{(d + y_0)^2 - r_0^2}{r_0}\right]\frac{1}{r_2^3}.$$

A feladat számadataival

$$E = \frac{1440}{r_2^3}\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right], \quad \text{és} \quad \sigma = 1{,}27 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{r_2^3}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right].$$

Magyar László (Kecskemét, Katona J. Gimn., IV. o. t.)