

A termodinamika I. főtétele szerint

$$(1) \quad U_2 - U_1 = \Delta Q + \Delta L,$$

ahol $U_2 - U_1$ a gáz energiájának változása, ΔQ a gáz által elvett hő, ΔL a gázon végzett munka. Ismert továbbá a vizsgált anyag állapotegyenlete:

$$(2) \quad pV = NkT,$$

$$(3) \quad U = C_v NT,$$

és a folyamatot leíró egyenlőség:

$$(4) \quad pV^\alpha = \text{áll.}$$

Az (1) egyenletből

$$(5) \quad \Delta Q = (U_2 - U_1) - \Delta L.$$

Az energiaváltozást a (3) egyenlőségből kapjuk:

$$(6) \quad U_2 - U_1 = C_v NT_2 - C_v NT_1 = C_v N \Delta T.$$

A gázon végzett munka a jelen esetben:

$$(7) \quad \Delta L = -p \Delta V.$$

Az itt szereplő ΔV -t a (2) és (4) összefüggésekből kaphatjuk, ugyanis ezekből V -t kifejezve

$$V = \left(\frac{NkT}{\text{áll.}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \text{ tehát}$$

$$\Delta V = \left(\frac{Nk}{\text{áll.}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[(T + \Delta T)^{\frac{1}{1-\alpha}} - T^{\frac{1}{1-\alpha}} \right].$$

A mondott közelítéssel és a (4) egyenlőség ismételt felhasználásával

$$(8) \quad \Delta V = \frac{1}{1-\alpha} \frac{V}{T} \Delta T.$$

Ezt behelyettesítve (7)-be, és figyelembe véve (2)-t:

$$(9) \quad \Delta L = -\frac{1}{1-\alpha} Nk \Delta T.$$

Végeredményben

$$(10) \quad \Delta Q = C_v N \Delta T + \frac{1}{1-\alpha} Nk \Delta T.$$

A fajhő fenti definíciója szerint

$$(11) \quad c = \frac{1}{N} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = C_v + \frac{k}{1-\alpha}.$$

Ez az egyenlőség speciális esetként tartalmazza az izobár ($\alpha = 0$, $c = C_v + k = C_p$), az adiabatikus ($\alpha = C_p/C_v$, $c = 0$), az izoterm ($\alpha \rightarrow 1$, $c \rightarrow \infty$) és az izochor ($\alpha \rightarrow \infty$, $c \rightarrow C_v$) folyamatra jellemző fajhő értékeket.

$\alpha > C_p/C_v$ esetén a fajhő negatív szám. Ez azt jelenti, hogy a hőmérsékletet növelve [ahhoz, hogy közben a (4) egyenlőség is teljesüljön] a gázt annyira össze kell nyomni, hogy végeredményben hő szabadul fel.

Pipek János (Bp., I. István Gimn., III. o. t.)

Kiegészítés. Láthatjuk, hogy a (4) egyenlőséggel jellemzett folyamatokban a fajhő független az állapottól (a [11] egyenlőségben nem szerepel p , V , T). Bizonyítható, hogy e tulajdonsággal (ideális gázt vizsgálva) csak az ilyen folyamatok rendelkeznek.

Hollósy Gábor (Sopron, Széchenyi I. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A matematikai nehézségek kevésbé fedik el a fizikai problémát, ha a gázon végzett munkát

$$\Delta L = \int_{v_1}^{v_2} -pdV = - \int_{v_1}^{v_2} \frac{\text{áll.}}{V^\alpha} dV = \frac{1}{\alpha-1} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

alakban számoljuk ki, és az állapotegyenlet felhasználásával jutunk a

$$\Delta L = -\frac{1}{1-\alpha} Nk \Delta T$$

egyenlőséghez.