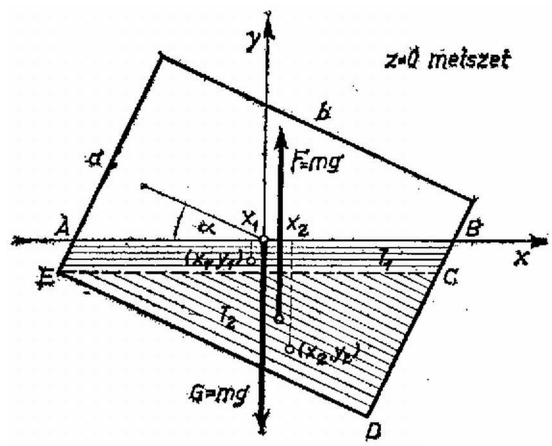
A hasáb akkor lesz stabilis egyensúlyi helyzetben, ha kis α szöggel való kimozdítás esetén a fellépő forgatónyomaték a testet eredeti helyzetébe visszaforgatni igyekszik. Az úszó testre a súlypontjában $G = mg$ súlyerő, a kiszorított víz súlypontjában $F = -mg$ felhajtóerő hat. Az egyensúlyi helyzetéből kibillentett hasáb esetén a két erő erőpárt alkot, melynek forgatónyomatéka a hatásvonalak távolságának ismeretében meghatározható.

A folyadék és a hasáb sűrűségének aránya $2:1$, ezért a hasáb súlypontja a folyadék szintjében lesz. Mivel a hasáb homogén, elég egy síkmetszetet vizsgálnunk.



Vegyük fel az ábrán látható koordinátarendszert! Ebben az erők hatásvonalainak távolsága megegyezik a kiszorított víz súlypontjának x_s koordinátájával. Bontsuk az $ABDE$ trapézt az ábrán látható módon egy $ABCE$ paralelogrammára és CDE háromszögre! Jelölje x_1 a paralelogramma súlypontjának x koordinátáját, T_1 a területét, x_2 és T_2 pedig ugyanezeket a mennyiségeket a CDE háromszögre. Ekkor:

$$x_s = \frac{x_1T_1 + x_2T_2}{T_1 + T_2}.$$

Az ábra segítségével a képletben szereplő mennyiségek egyszerűen megkaphatók:

$$x_1 = \frac{1}{4}(b \text{ tg } \alpha - a) \sin\ \alpha,$$

$$x_2 = \frac{1}{6}\left\{b\left(\frac{1}{\cos\ \alpha} + \text{ tg } \alpha \cdot \sin\ \alpha\right) - a(\sin\ \alpha + 2 \text{ tg } \alpha)\right\},$$

$$T_1 = \frac{b}{2}(a - b \text{ tg } \alpha), \qquad T_2 = \frac{b^2}{2} \text{ tg } \alpha.$$

Felhasználva, hogy $a \ll 1$ esetén: $\sin\ \alpha \approx \text{ tg } \alpha$, és $\cos\ \alpha \approx \frac{1}{\cos\ \alpha} \approx 1$, és az α-ban lineárisnál magasabbrendű tagokat elhanyagolva

$$x_3 = \frac{1}{4a}\left(\frac{2}{3}b^2 - a^2\right)\alpha$$

adódik. A fellépő forgatónyomaték:

$$M = -mgx_s = -\frac{mg\alpha}{4a}\left(\frac{2}{3}b^2 - a^2\right) = -M^*\alpha. \tag{1}$$

Az egyensúly stabilis, ha

$$M^* > 0, \quad \text{ami} \quad \frac{b}{a} > \sqrt{\frac{3}{2}} \tag{2}$$

fennállása esetén teljesül.

(1)-ből látható, hogy a forgatónyomaték a szögkitéréssel arányos, a mozgás tehát harmonikus rezgőmozgás lesz. Felhasználva, hogy a hasáb tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2),$$

a rezgésidő

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{M^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{a(a^2 + b^2)}{g(2b^2 - 3a^2)}}.$$

A feladat numerikus adataival: $T = 0{,}14$ s.

Szlacsányi Kornél (Bp., Berzsenyi D. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A súlyponton átmenő, b hosszúságú oldaléllel párhuzamos tengelyre vonatkozó egyensúly akkor lesz stabilis, ha $\frac{l}{a} > \sqrt{\frac{3}{2}}$. Mivel $l > b$, (2) fennállása esetén ez a feltétel automatikusan teljesül.

2. Ha a hasáb ϱ sűrűsége nem egyezik meg $\frac{\varrho_0}{2}$-vel, akkor (2) helyébe a

$$\frac{b}{a} > \sqrt{6\frac{\varrho}{\varrho_0}\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)}$$

feltétel lép.

Iglói Ferenc (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.)

3. A legtöbb megoldó forgási rezgés helyett függőleges irányú rezgést vizsgált. Dolgozatuk 2 pontot kapott.

4. A valóságban a rezgésidő nagyobb a fentebb számítottnál, mivel a hasábon kívül a víz egy része is mozgásba jön.