Az érme egy merev test, melynek mozgását úgy írhatjuk le, hogy megadjuk minden időpillanatban súlypontjának sebességét és a súlypont körüli forgás szögsebességét. A megoldáshoz a következő lépések vezetnek:

1. Felírjuk a testre ható erőket és meghatározzuk a súlypontra vonatkoztatott forgatónyomatékokat (dinamikai változók).

2. Kiszámítjuk a test súlypontjának sebességét, a forgás szögsebességét és ezek időbeli változását (kinematikai változók).

3. A Newton-egyenletek alapján kapcsolatot teremtünk az erők és gyorsulások, illetve a forgatónyomatékok és a szögsebesség megváltozása (szöggyorsulás) között (a dinamika alapegyenletei).

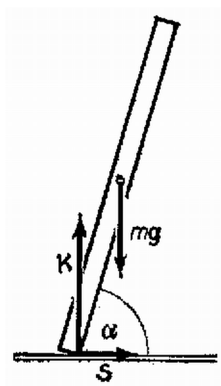
4. Figyelembe vesszük, hogy az érme csúszásmentesen gördül, és ezért a kinematikai változók nem függetlenek egymástól (kényszerfeltételek).

5. Megoldjuk a kapott egyenletrendszert.

Ezek a lépések minden olyan feladatnál alkalmazhatók, ahol egy merev test mozgását kell leírnunk az erők ismeretében.

Nézzük meg, hogyan alakulnak a fenti lépések a jelen feladatnál!

1. Az érmére mg súlyerő, az asztallap K nyomóereje és S súrlódási erő hat (1. ábra).



1. ábra

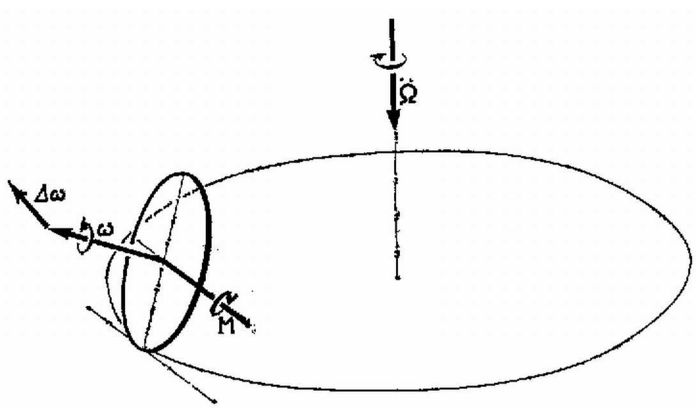
Ezen erők súlypontra vonatkoztatott forgatónyomatéka:

$$\mathbf{M} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i),$$

ahol $\mathbf{F}$ a testre ható erőket, $\mathbf{r}_i$ pedig a súlypontból az erők hatásvonalának tetszőleges pontjába mutató vektorokat jelöli (a vektoriális szorzás értelmezését l. a K. M. L. 1970. évi 6. számában közölt cikkben). A forgatónyomatékok nagysága

$$M = Kr\cos\alpha - Sr\sin\alpha, \tag{1}$$

és iránya az erők síkjára merőleges (2. ábra).



2. ábra

2. Feltételezzük, hogy az érme egyenletes szögsebességgel gurul egy R sugarú körpályán. Jelöljük az érme súlypontjának szögsebességét Ω-val, a szimmetriatengely körüli forgás szögsebességét pedig ω-val (2. ábra). Ha $R \gg r$, akkor a súlypont is jó közelítéssel R sugarú körpályán mozog és ezért a centripetális gyorsulás:

$$a = R\Omega^2. \tag{2}$$

Mivel ω-nak csak a nagysága állandó, iránya nem, ezért kérdezhetjük, hogy mennyit változik ω Δt idő alatt. Az érme Δt idő alatt $\Omega \cdot \Delta t$ szöggel fordul el, továbbá az ω vektor vízszintes vetülete $\omega \sin\alpha$, ezért

$$|\Delta\,\omega| = \Omega\,\Delta t \cdot \omega \sin\alpha. \tag{3}$$

$\Delta\,\omega$ iránya megegyezik $\mathbf{M}$ irányával.

3. Newton II. törvénye alapján (felhasználva; hogy a függőleges gyorsulás nulla)

$$mg - K = 0, \tag{4}$$

$$S = mR\,\Omega^2. \tag{5}$$

A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$\Delta\mathbf{N} = \mathbf{M}\Delta t, \tag{6}$$

ahol $\Delta\mathbf{N}$ az impulzusnyomaték megváltozása Δt idő alatt (részletesebben l. az idézett cikket vagy Budó-Pócza: Kísérleti Fizika I. 49. §-t). Ha $R \gg r$, akkor $\Omega \ll \omega$, és az érme impulzusnyomatéka jó közelítésben csak az ω szögsebességből adódik. Felhasználjuk, hogy a henger tehetetlenségi nyomatéka $I = (1/2)mr^2$, továbbá $N = I\omega$, ahonnan

$$\Delta\mathbf{N} = I\Delta\,\omega. \tag{7}$$

4. A tiszta legördülés feltétele

$$r\omega = R\,\Omega. \tag{8}$$

5. Az (1)–(8) egyenleteket összevetve kapjuk, hogy

$$\begin{gathered} m \cdot g \cdot r \cdot \cos\alpha - S \cdot r \cdot \sin\alpha = (1/2)m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \Omega \cdot \sin\alpha, \\ S = mR\,\Omega^2, \\ R\,\Omega = r\omega. \end{gathered}$$

Az utóbbi három egyenlet megoldása:

$$\frac{R}{r} = \frac{3}{2}\frac{r\omega^2}{g}\operatorname{tg}\alpha, \tag{9}$$

$$S = \frac{2}{3}\frac{mg}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{10}$$

Ha megadjuk a kezdeti dőlésszöget és szögsebességet (vagy az energiát), akkor ezekből meghatározhatjuk a körpálya sugarát.

Ha a súrlódási együttható μ, akkor a tapadás (vagyis a tiszta legördülés) előfeltétele: $S \le mg\mu$, ahonnan

$$\operatorname{tg}\alpha \ge \frac{2}{3\mu}. \tag{11}$$

Ha ennél laposabban indítjuk az érmét, akkor rögtön elcsúszik. Ha az érme veszít az energiájából, akkor R és α csökken mindaddig, amíg (11)-ben az egyenlőség nem teljesül. Ebből azonban csak a legkisebb dőlésszöget határozhatjuk meg, a minimális görbületi sugár kiszámítása csak az energiaveszetés (légellenállás, gördülő súrlódás) részletes leírásával együtt lehetséges.

Összefoglalva: A pénzérme elfordulásának jelenségét a (6) egyenlet írja le. Ha egy merev testre ható forgatónyomaték forgástengely irányú, akkor a szögsebesség nagysága változik (szöggyorsulás), ha merőleges a forgástengelyre, akkor a forgástengely iránya változik (precesszió jelensége).
(4 pont)

Megjegyzés. Ha az $R \gg r$ feltétel nem teljesül, akkor Ω nem hanyagolható el ω mellett. Ilyenkor Ω-t fel kell bontani ω-val párhuzamos és arra merőleges összetevőkre és ezeket I_1, illetve I_2-vel szorozva kapjuk meg az eredő impulzusnyomatékot. Mivel a szimmetriatengelyre vonatkoztatott I_1 és az egyik átmérőre vonatkoztatott I_2 tehetetlenségi nyomaték nem egyezik meg egymással, ezért $\mathbf{N}$ iránya más lesz, mint ω iránya, és a (7) egyenletet módosítani kell. Egyébként a számítás menete hasonló a fentiekhez.

Gnädig Péter