A v_0 sebességgel lefelé hajított golyó $v_1 = \sqrt{2gH + v_0^2}$ sebességgel érkezik a síkhoz. Mivel az első ütközés után H magasságig emelkedik, az ütközés utáni sebesség $v_2 = \sqrt{2gH}$. Az ütközési együttható

$$\varepsilon = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{2gH}{2gH + v_0^2}}. \tag{1}$$

Az ütközési együttható állandó, tehát bármely egymás után következő két ütközésre $v_{k+1} = \varepsilon v_k$, azaz

$$v_{k+1} = \varepsilon^{k-1} \cdot v_2 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

A golyó az egyes szakaszokon egyenletesen gyorsuló mozgást végez, ezért az első ütközésig eltelő idő:

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{g} = \frac{\sqrt{2gH + v_0^2} - v_0}{g}. \tag{3}$$

A k-adik és a $(k+1)$ ütközés közt eltelő idő egy függőleges hajítás kétszeres ideje:

$$t_{k+1} = 2\frac{u_{k+1}}{g} = \frac{2v_2}{g}\varepsilon^{k-1}. \tag{4}$$

A $(k+1)$-edik ütközésig összesen eltelő idő ennek alapján

$$T_{k+1} = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{k+1} = t_1 + \frac{2v_2}{g}(\varepsilon^0 + \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{k-1}). \tag{5}$$

A sebesség bizonyos hányada minden ütközés után megmarad, így a golyó elvileg sokszor pattanhat. A végtelen sok ütközés azonban véges idő alatt játszódik le, ugyanis (1) alapján $\varepsilon < 1$, a végtelen mértani sor összege véges:

$$\varepsilon^0 + \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{k-1} + \ldots = \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

A kérdezett idő tehát

$$T = t_1 + \frac{2v_2}{g}\frac{1}{1-\varepsilon}. \tag{6}$$

A korábban kifejezett értékeket behelyettesítve:

$$T = \frac{\sqrt{2gH + v_0^2} - v_0}{g} + 2\sqrt{\frac{2H}{g}}\frac{1}{1 - \sqrt{\dfrac{2gH}{2gH + v_0^2}}}. \tag{7}$$

Tudjuk, hogy a golyó a második ütközés után H' magasságig emelkedik, és ezért $v_3 = \sqrt{2gH'}$. Az ütközési együtthatót ennek ismeretében kétféleképpen is felírhatjuk:

$$\varepsilon = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_2}. \tag{8}$$

Ebből

$$\frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{2gH + v_0^2}} = \frac{\sqrt{2gH'}}{\sqrt{2gH}},$$

$$v_0 = \sqrt{2gH\left(\frac{H}{H'} - 1\right)}. \tag{9}$$

Pálvölgyi Éva (Bp., Madách I. Gimn., III. o. t.)
Gáspár Csaba (Dunaújváros, Münnich F. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A mozgás valódi lefolyását természetesen nem úgy kell elképzelni, hogy a test végtelen sokszor pattan. Az emelkedési magasságok ugyanis szintén mértani haladvány szerint csökkennek (melynek hányadosa ε^2), ezért egy bizonyos idő után a képletből számolható emelkedés magassága a golyó deformációjához mérhető. Ekkor már tényleges felemelkedés nem történik, nem beszélhetünk ütközésről.

Mivel a fenti jelenség csak elég sok ütközés után lép fel, a számított T érték a valóditól nem sokban tér el. Az ebből következő hiba általában lényegesen kisebb más hibáknál (pl. a nehézségi gyorsulás pontatlanságából származó hibánál).

Pipek János (Bp., I. István Gimn., III. o. t.)