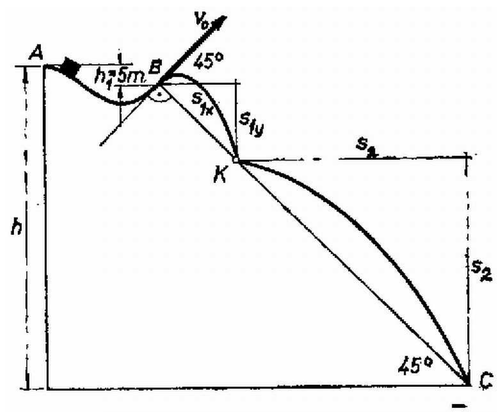
I. megoldás. Amíg a test A-ból B-be jut (1. ábra), helyzeti energiája mgh_1-gyel csökken.



1. ábra

Így $mv_0^2/2 = mgh_1$ mozgási energiát szerez. Ebből

$$v_0 = 2\sqrt{gh_1}.$$

Miközben a test B-ből K-ba kerül, t_1 idő telik el. Mivel a test vízszintes irányban egyenes vonalú egyenletes mozgást végez $v_0 \cdot \cos 45^\circ = v_0/\sqrt{2}$ sebességgel,

$$s_{1x} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \cdot t_1.$$

Ugyanakkor függőleges irányban $v_0 \sin 45^\circ = v_0/\sqrt{2}$ kezdősebességgel egyenletesen gyorsuló mozgást végez, így

$$-s_{1y} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \cdot t_1 - \frac{g}{2} \cdot t_1^2, \quad \text{és} \quad |s_{1x}| = |s_{1y}|.$$

Ebből

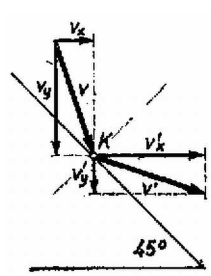
$$t_1 = \frac{2v_0\sqrt{2}}{g}, \quad \text{és} \quad s_1 = \frac{2v_0^2}{g} = \frac{2 \cdot 2gh_1}{g} = 4h_1.$$

A tömegpont K-ba érkezésekor sebességének vízszintes komponense (2. ábra)

$$v_x = v_0 \cdot \cos 45^\circ = v_0\sqrt{2}/2,$$

függőleges komponense pedig

$$v_y = v_0 \cdot \sin 45^\circ - gt_1 = v_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - g\frac{2v_0\sqrt{2}}{g} = -\frac{3v_0\sqrt{2}}{2}.$$



2. ábra

Visszapattanás után, mivel a lejtő 45°-os, a sebesség vízszintes komponense

$$v'_x = -v_y = \frac{3v_0\sqrt{2}}{2},$$

és a függőleges komponense

$$v'_y = -v_x = -\frac{v_0\sqrt{2}}{2}.$$

A K-ból C-be jutás idejét t_2-vel jelölve,

$$s_{2x} = v_0\,\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot t_2, \quad \text{és} \quad |s_{2x}| = |s_{2y}|,$$

$$-s_{2y} = -v_0\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t_2 - \frac{gt_2^2}{2},$$

ahonnan

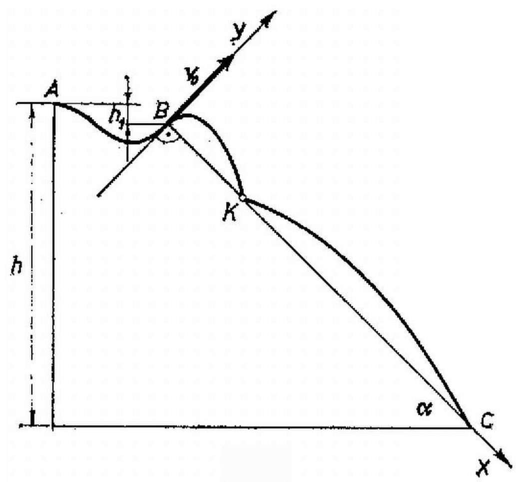
$$t_2 = \frac{2v_0\sqrt{2}}{g}, \quad \text{és} \quad s_2 = v_0\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2v_0\sqrt{2}}{g} = \frac{6v_0^2}{g} = 12h_1.$$

Így a lejtő teljes magassága

$$h = h_1 + s_1 + s_2 = 17h_1 = 85\ \text{m}.$$

Horváth László (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Rögzítsük a koordináta-rendszer kezdőpontját a B pontban, legyen az x-tengely lejtő irányú, az y-tengely pedig a lejtőre merőleges (3. ábra).



3. ábra

Az A pontban a test energiája mgh, a B pontban

$$mgh = mg(h-h_1) + (m/2)v_0^2,$$

innen $v_0 = \sqrt{2gh_1}$. A B pontban tehát a test y irányú sebessége $v_0 = \sqrt{2gh_1}$, és x irányú sebessége 0. Mozgás közben a testre csak a nehézségi erő hat, ezért y irányú gyorsulása $a_y = -g/\sqrt{2}$, x irányú gyorsulása pedig $a_x = g/\sqrt{2}$. Így a test koordinátái t idő múlva

$$y = -\frac{g}{2\sqrt{2}}\cdot t^2 + v_0 t, \quad x = \frac{g}{2\sqrt{2}}\,t^2.$$

A K pontban $y = 0$, vagyis $v_0 t - \frac{g}{2\sqrt{2}}\cdot t^2 = 0$ (a $t = 0$ időpontban a test B-ben van), ahonnan

$$t = \frac{v_0 2\sqrt{2}}{g}.$$

Így K-ban az ütközés előtt a test y irányú sebessége

$$v_y' = v_0 - \frac{g}{\sqrt{2}}\cdot t = v_0 - \frac{v_0 2\sqrt{2}}{g}\cdot\frac{g}{\sqrt{2}} = -v_0.$$

Visszapattanáskor v_y' az ellentettjére változik, tehát a test a lejtőt újra $v_0 y$ irányú sebességgel hagyja el. Mivel a lejtőre való visszaérkezés idejét csak a lejtőre merőleges kezdeti sebesség és gyorsulás befolyásolja, a K-ból C-be jutás ideje is

$$t_1 = \frac{v_0 2\sqrt{2}}{g}.$$

Így a test B-ből C-be $2t_1 = \frac{v_0 4\sqrt{2}}{g}$ idő alatt jut el. A test x irányú mozgását az ütközés nem befolyásolja, tehát a tömegpont ennyi idő alatt x irányban

$$\overline{BC} = \frac{g}{2\sqrt{2}}\,(2t_1)^2 = \frac{g}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{16v_0^2\cdot 2}{g^2} = \frac{8\cdot\sqrt{2}v_0^2}{g} = 16h_1\cdot\sqrt{2}$$

utat tesz meg.

A lejtő teljes magassága

$$h = h_1 + \overline{BC} \cdot \sin 45^\circ = 17h_1 = 85 \text{ m}.$$

Fazekas István (Eger, Gárdonyi G. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A II. számítási mód lehetővé teszi, hogy a feladatot általánosabban, nem teljesen rugalmas ütközést feltételezve is megoldjuk. Ekkor az ütközés során v_y nem egyszerűen az ellentettjére változik, hanem annak k-szorosára, ahol $0 \le k \le 1$, azaz a test a lejtőt másodszor $-kv_y' = kv_0$, lejtőre merőleges sebességgel hagyja el. Ennek megfelelően K-ból C-be $\dfrac{kv_0 2\sqrt{2}}{g} = kt_1$ idő alatt jut el, így B-ből C-be $(1+k)\,t_1$ ideig halad, azaz

$$\overline{BC} = \frac{g}{2\sqrt{2}}\,(1+k)^2 t_1^2 = 4\sqrt{2}\,(1+k)^2 \cdot h_1,$$

és

$$h = h_1\left[4 \cdot (1+k)^2 + 1\right].$$

Teljesen rugalmas ütközéskor $k = 1$, így $h = h_1 \cdot 17$.

Boros Endre (Bp., I. István Gimn., III. o. t.)