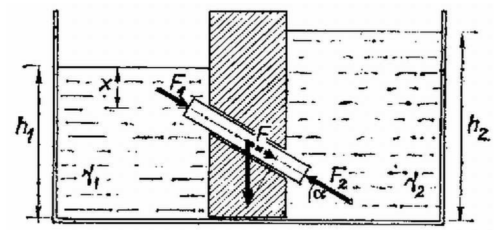
A pálca helyzetét jellemezzük középvonala felső végének és a h_1 magasságú folyadék felszínének x távolságával. Feltesszük, hogy a folyadékszint a kis keresztmetszetű pálca mozgása során nem változik.

Az egyensúly feltétele, hogy a pálcára ható erők eredője 0 legyen. A furatra merőleges komponensekre ez a furat hatása miatt mindig teljesül.



A hossztengely irányában a véglapokat nyomó F_1, illetve F_2 erők, valamint a pálca súlyának hosszirányú F összetevője hat. Ezek egyenként:

(1) $$F_1 = A \cdot x \cdot \gamma_1,$$

(2) $$F_2 = A \cdot (h_2 - h_1 + x + l \cdot \sin\alpha) \cdot \gamma_2,$$

(3) $$F = A \cdot l \cdot (\sin\alpha) \cdot \gamma,$$

ha A a pálca keresztmetszete. A hosszirányba ható eredő erő:

(4) $$F_e = F + F_1 - F_2 = A[x(\gamma_1 - \gamma_2) - (h_2 - h_1)\gamma_2 - l(\sin\alpha)(\gamma_2 - \gamma)]$$

(ez pozitív, ha az eredő a rúd tengelye mentén lefelé mutat).

Egyensúly esetén $F_e = 0$; ez az

(5) $$x_0 = \frac{(h_2 - h_1)\gamma_2 + l(\sin\alpha)(\gamma_2 - \gamma)}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

összefüggéssel megadott helyen teljesülhet, ha a lyuk helyzete olyan, hogy a pálcának legalább egy kis darabja a lyukban marad. x_0 természetesen csak a folyadékszintek *különbségétől* függ.

Az egyensúlyi helyzet stabilitásának vizsgálatához vezessük be új jellemzőnek az egyensúlyi helyzettől való $u = x - x_0$ eltérést. Ekkor $x = x_0 + u$, ezt (4)-be helyettesítve

(6) $$F_e = A(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot u$$

Ennek alapján megállapíthatjuk, hogy ha azon folyadék fajsúlya nagyobb, melybe a pálca felső vége nyúlik ($\gamma_1 > \gamma_2$), akkor az egyensúly labilis, mert a bot kitérítésekor a fellépő erő a kitérést növelni igyekszik.

Ha $\gamma_2 > \gamma_1$, akkor az egyensúly stabilis.

Esetünkben $x_0 = 15{,}33$ cm, az egyensúlyi helyzet labilis.

Kiegészítés: Ha az (5) összefüggés végeredményül negatív számot adna, akkor ez annak felelne meg, hogy a pálca vége kiemelkedik a vízből. Ekkor azonban (1) nem igaz, helyette

(1') $$F_1' = 0, \text{ és ekkor}$$

(5') $$x_0' = -\frac{(h_2 - h_1)\gamma_2 + l(\sin\alpha)(\gamma_2 - \gamma_1)}{\gamma_2}$$

szolgáltatja az egyensúly helyét (amely mindig stabilis). A számadatok megfelelő választása mellett a bot akár az (5), akár az (5') helyen egyensúlyban lehet. (Esetünkben $x_0' = -12{,}3$ cm lenne, ez azonban a pálca rövidsége miatt nem jöhet létre.)

Tegze Miklós (Bp., Kölcsey F. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A kitűzéskor az ábrán jelölt és a szövegben közölt magasságadatok nem voltak összhangban.

2. A (6) egyenlőség Newton II. törvényével együtt meghatározza a pálca mozgását. A tömeget és a gyorsulást megfelelő módon behelyettesítve és a végeredményt a harmonikus rezgőmozgás alapegyenletével összevetve kapjuk, hogy ha $\gamma_2 > \gamma_1$, akkor a pálca az egyensúlyi helyzete körül

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g} \cdot \frac{\gamma}{(\gamma_2 - \gamma_1)\sin\alpha}}$$

periódusidővel rezgést fog végezni, amelynek amplitúdója a kitérítés nagyságától függ. Ez az eredmény a valóságot csak közelíti, mert nem vettük figyelembe a közegellenállást és a megmozgatott folyadék tömegét.