I. megoldás. A c kezdősebességgel α szög alatt ferdén elhajított tárgy helyzetének koordinátái:

$$x = c\cdot\cos\alpha\cdot t,$$
$$y = c\cdot\sin\alpha\cdot t - \frac{g}{2}\cdot t^2.$$

Az időt kiküszöbölve kapjuk a pálya függvényét:

$$y = \operatorname{tg}\alpha\cdot x - \frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}\cdot x^2 = \operatorname{tg}\alpha\cdot x - \frac{g}{2c^2}\cdot(1+\operatorname{tg}^2\alpha)x^2.$$

Feladatunkban $x = A$ és $y = B$ adott érték, ezeket a pálya függvényében felhasználva c kezdősebességre egyenletet kapunk:

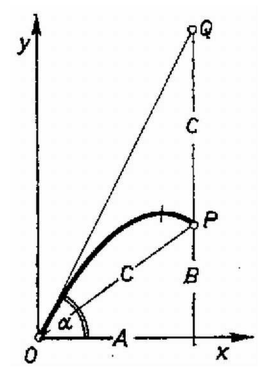
$$B = \operatorname{tg}\alpha\cdot A - \frac{g}{2c^2}\cdot(1+\operatorname{tg}^2\alpha)A^2.$$

Ebből a kezdősebesség:

$$c^2 = \frac{gA}{2}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - B/A}. \tag{1}$$

A változó rész differenciálhányadosa:

$$\frac{2}{gA}\cdot\frac{d(c^2)}{d(\operatorname{tg}\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 2B\operatorname{tg}\alpha/A - 1}{(\operatorname{tg}\alpha - B/A)^2}.$$



1. ábra

Szélsőérték annál a $\operatorname{tg}\alpha$-nál lehetséges, ahol a differenciálhányados nulla:

$$\operatorname{tg}^2\alpha - 2B\operatorname{tg}\alpha/A - 1 = 0.$$

Ennek megoldása:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{A} + \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{A}.$$

Eredményünkben $C = \sqrt{A^2+B^2}$ a célpontnak az origótól mért távolságát jelenti (1. ábra). C felhasználásával:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B+C}{A}.$$

Az indítási sebességet megkapjuk, ha (1)-ben felhasználjuk $\operatorname{tg}\alpha$ értékét:

$$c^2 = \frac{gA}{2}\cdot\frac{1+(B+C)^2/A^2}{(B+C)/A - B/A} = g(C+B).$$

A mi adatainkkal $\operatorname{tg}\alpha = (30+50):40 = 2$, $\quad\alpha = 63{,}4^\circ$; $\quad c = \sqrt{g(B+C)} = 28$ m/s.

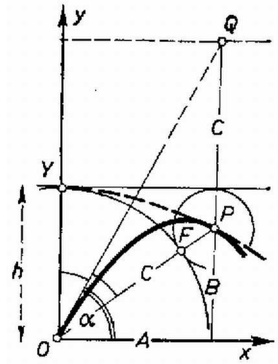
Bérces György (Nagykanizsa, Landler Gimn., IV. o. t.)

Az eredményt szerkesztéssel is megkaphatjuk, P célpont fölött függőlegesen felmérjük $C = OP = PQ$ távolságot és meghúzzuk az OQ egyenest. c indítású sebesség egyenlő azzal a sebességgel, amellyel egy tárgyat függőlegesen felfelé lehetne hajítani $B + C$ távolság fele magasságába.

Faragó Gyula (Bp., Jedlik Á. Gimn., IV. o. t.) és
Véner Péter (Bp., Kaffka M. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Tanulságos a feladat szerkesztéses megoldása. (Lásd a KML. 1962. évi 6. számának 33. oldalán olvasható cikket.)

Az adott kezdősebességgel elérhető legtávolabbi pontok e hajítási pályák burkológörbéjén vannak (2. ábra).



2. ábra

Ezen van P célpontunk is, és ennek ismeretében kell a burkológörbét megtalálnunk. A burkológörbe fókuszáról ismeretes, hogy az origóban van, vezérvonala ezek szerint P felett $C = OP = PQ$ magasságban van. Így a függőleges hajításra jellemző $h = c^2/2g$ értéke $(B + C)/2$,

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{B + C}{2},$$

amiből következik, hogy az indítási sebesség $c = \sqrt{g(B + C)}$.

A hajítási parabolapálya vezérvonala az $OY = h$ magasságban rajzolt vízszintes egyenes. Fókuszának mértani helye az O középpontú, h rádiuszú kör. P a burkológörbén van, tehát csak *egy* pályán található el, de egyszersmind a hajítási pályának is pontja. A hajítási parabola fókusza az OP egyenes és $OY = h$ rádiuszú kör F metszéspontja. Ha a minimális sebességhez tartozó pálya indítási α szögét keressük, nem kell mást tennünk, mint a célponthoz vezető OP irány és az y tengely szögét feleznünk.