A kockára három erő hat:

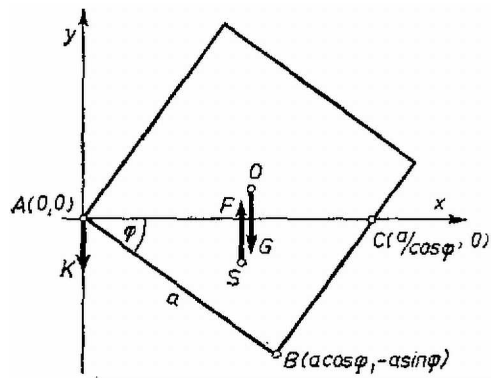
1. A kocka középpontjában függőlegesen lefelé mutató súlyerő:

$$G = a^3 \cdot \gamma \, (\gamma \text{ a kocka fajsúlya});$$

2. a folyadékba merülő rész súlypontjában a függőlegesen felfelé irányuló archimedesi felhajtóerő:

$$F = a^3 \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} \cdot 3\gamma \qquad (3\gamma \text{ a folyadék fajsúlya});$$

3. a tengelynél fellépő K erő, amely a ferde helyzetbe kényszeríti a kockát.



Az egyensúly feltétele az, hogy a kockára ható *összes* erő eredője és a forgatónyomatékok összege nulla legyen. Ha a forgatónyomatékokat a tengelyre nézve írjuk fel, akkor a szög meghatározásához elegendő pusztán az utóbbi összefüggés figyelembevétele, mert ekkor az ismeretlen K erő forgatónyomatéka nulla.

A súlyerő karja:

$$k = a\cos 45^\circ \cos(45^\circ - \varphi).$$

A felhajtó erő karja egyenlő a vízbe merülő rész súlypontjának x koordinátájával, ha az x tengelyt a folyadék felszínével párhuzamosan vesszük fel:

$$s_x = \frac{a\cos\varphi + a/\cos\varphi}{3},$$

ahol azt használtuk fel, hogy az ABC háromszög súlypontjának helyvektorát az

$$\vec{s} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

összefüggés adja ($\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ a csúcsokba mutató helyvektorok).

Írjuk fel a forgatónyomatékok egyenlőségét:

$$a^3\gamma \cdot a\cos 45^\circ \cos(45^\circ - \varphi) = a^3 \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} 3\gamma \cdot a \frac{\cos\varphi + 1/\cos\varphi}{3},$$

$$\cos(45^\circ - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi), \operatorname{tg}\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi$$

felhasználásával, az egyenletet egyszerűsítve:

$$\cos\varphi + \sin\varphi = \sin\varphi + \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Ebből $\cos^3\varphi = \sin\varphi$ (ill. $\cos^2\varphi = \operatorname{tg}\,\varphi$).
Négyzetre emelve és rendezve:

$$\left(\cos^2\varphi\right)^3 + \cos^2\varphi - 1 = 0 \qquad \left(\text{ill. } \operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{tg}\,\varphi - 1 = 0\right).$$

Az egyenletet grafikusan ábrázolva próbálgatással vagy a Cardano-képlettel megoldva egyetlen valós gyök adódik:

$$\operatorname{tg}\,\varphi = \cos^2\varphi \approx 0{,}6823.$$

Tehát a kocka lapja $\varphi = 34^\circ 18{,}5'$ szöget zár be a vízszintessel.

Pipek János (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A megoldók többsége elfeledkezett a tengelynél ébredő erőről és a szöget az így feltételezett „erőegyensúly” alapján számította. Bár ez a megoldás számértékileg csupán fél fokkal tér el a valóditól, az ilyen durva elvi hibát tartalmazó dolgozatokat mégsem lehetett elfogadni. Itt nem az egyenlet számszerű megoldásán volt a hangsúly.