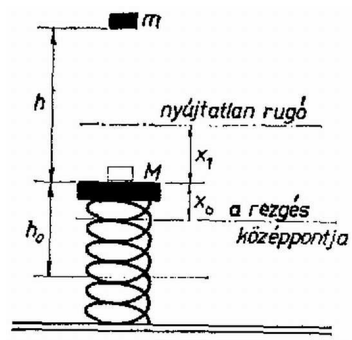
**I. megoldás.** Ha a rugó felső végén nincs $M$ tömeg, akkor az egész folyamatra alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának tételét. Mivel egy, nyugalmi helyzetéhez viszonyítva $h_0$-lal megnyújtott vagy összenyomott rugó energiája $(1/2)Dh_0^2$, azért

$$(1/2)mv_0^2 + mg(h+h_0) = (1/2)Dh_0^2,$$

tehát

$$v_0 = \sqrt{\frac{D}{m}h_0^2 - 2g(h+h_0)}$$

függőleges kezdősebességgel kell elhajítani $m$-et, hogy a rugó $h_0$ értékkel nyomja össze. Numerikus adatokkal $v_0 \approx 12{,}6$ m/s.




Amennyiben a rugón $M$ tömegű rugalmatlan teher nyugszik, akkor az $m$ tömeg ezzel rugalmatlanul ütközik, tehát mechanikai energia hővé alakul. A mechanikai energia megmaradásának tételét így nem alkalmazhatjuk az egész folyamatra. Az ütközésig terjedő folyamatra

$$(1/2)mv_0^2 + mgh = (1/2)mv^2, \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2gh},$$

ahol $v$ a test ütközés előtti sebessége.

$m$ tömeg $M$-mel rugalmatlanul ütközik, az ütközés utáni közös $c$ sebesség az impulzusmegmaradás tételéből

$$c = \frac{mv}{m+M}.$$

Ütközés után a tömegek mozgási energiája $E_m = (1/2)(m+M)c^2$, a helyzeti energia megváltozása $E_h = (m+M)gh_0$. A rugó már az ütközés pillanatában is rendelkezett helyzeti energiával, mivel $M$ súlyereje $x_1 = Mg/D$ szakasszal nyomta össze. Így energiájának megváltozása $E_r = (1/2)D(x_1+h_0)^2 - (1/2)Dx_1^2$.

A mechanikai energia megmaradásának tétele

$$E_m + E_h = E_r,$$
$$(1/2)(m+M)c^2 + (m+M)gh_0 = (1/2)D(x_1+h_0)^2 - (1/2)Dx_1^2.$$

Behelyettesítve $c$ és $x_1$ értékét

$$\frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}(v_0^2+2gh) + (m+M)gh_0 = \frac{1}{2}D\left[\left(\frac{Mg}{D}+h_0\right)^2 - \left(\frac{Mg}{D}\right)^2\right].$$

Innen

$$v_0 = \sqrt{D\frac{m+M}{m^2}h_0^2 - 2\frac{m+M}{m^2}gh_0 - 2gh}.$$

Numerikus értékekkel $v_0 \approx 20{,}1$ m/s.

$v_0$ iránya egyaránt mutathat felfelé és lefelé, hiszen felfelé dobva el az $m$ tömeget az eldobás helyén lefelé is $v_0$ sebeséggel halad keresztül.

$v_0$ kifejezésének csak akkor van értelme, ha a négyzetgyök alatt nemnegatív szám áll, vagyis

$$D\frac{m+M}{m^2}h_0^2 - 2\frac{m+M}{m}gh_0 - 2gh \geq 0.$$

Ha ez teljesül, akkor minden $v_0$ esetén a rugó $h_0$-nál jobban összenyomódik. Az előbbi egyenlőtlenségből a rugó minimáliss összenyomódása

$$h_0 \geq \left(g + \sqrt{g^2 + 2\frac{Dgh}{m+M}}\right)\frac{m}{D} \approx 0{,}06\,\mathrm{m}.$$

*Sailer Kornél* (Ózd, József A. Gimn., IV. o. t.)

**II. megoldás.** Foglalkozzunk az általánosabb esettel, az $M = 0$-nak megfelelő speciális eset szolgáltatja az első eset megoldását.

Az $m$ tömeg ütközés előtti sebessége a $v = v_0 + gt$ és $h = v_0 t + (g/2)t^2$ összefüggésekből $t$ kiküszöbölésével $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$. $m$ ekkora sebességgel rugalmatlanul ütközik az álló $M$-be, így ütközés utáni sebességük

$$c = \frac{m}{m+M}\sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Az ütközés után a mozgás egy harmonikus rezgőmozgás részének tekinthető, melynek középpontja az ütközés helye alatt $x_0 = mg/D$ távolsággal van, hiszen $m$ súlyereje meg ennyivel nyomja össze a rugót. A rezgés amplitúdója $A = h_0 - x_0$, körfrekvenciája $\omega = \sqrt{\frac{D}{m+M}}$. A rezgés kitérése és sebessége idő függvényében

$$x = A\sin(\omega t + \varphi), \qquad v = A\omega\cos(\omega t + \varphi).$$

Az $m$ tömeggel való ütközés helyén

$$x_0 = A\sin(\omega t_0 + \varphi), \qquad c = A\omega\cos(\omega t_0 + \varphi),$$

innen

$$\sin(\omega t_0 + \varphi) = x_0/A, \qquad \cos(\omega t_0 + \varphi) = c/A\omega.$$

Mivel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ezért

$$\left(\frac{x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{c}{A\omega}\right)^2 = 1,$$

ahonnan

$$c^2 = \omega^2(A^2 - x_0^2) = \frac{D}{m+M}\left[\left(h_0 - \frac{mg}{D}\right)^2 - \left(\frac{mg}{D}\right)^2\right].$$

Behelyettesítve $c$ értékét

$$\frac{m^2}{(m+M)^2}(v_0^2 + 2gh) = \frac{D}{m+M}\left[\left(h_0 - \frac{mg}{D}\right)^2 - \left(\frac{mg}{D}\right)^2\right],$$

ebből

$$v_0 = \sqrt{D\frac{m+M}{m^2}h_0^2 - 2\frac{m+M}{m}gh_0 - 2gh},$$

ami megegyezik az első megoldás eredményével.

*Tél Katalin* (Bp., Apáczai Csere J. Gimn., III. o. t.)