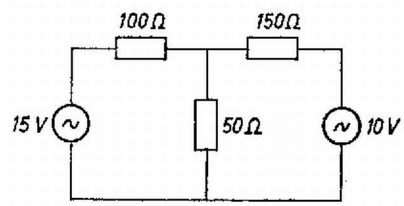
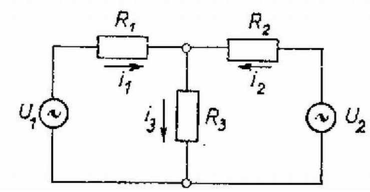
Vizsgáljuk az áramkört tetszőleges t időpontban, és írjuk fel rá Kirchhoff törvényeit! (Az $U_1 = 15$ V, $U_2 = 10$ V, $R_1 = 100$ ohm, $R_2 = 150$ ohm $R_3 = 50$ ohm, $\varphi = 60^\circ$ jelöléseket alkalmazzuk.)





$$i_1 R_1 + i_3 R_3 = \sqrt{2} \cdot U_1 \cdot \sin \omega t,$$
$$i_2 R_2 + i_3 R_3 = \sqrt{2} \cdot U_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi),$$
$$i_1 + i_2 - i_3 = 0.$$

Felhasználtuk, hogy egy U effektív értékű szinuszosan váltakozó feszültség maximális értéke $\sqrt{2} \cdot U$. Megoldva az egyenletrendszert:

$$i_3 = \sqrt{2} \frac{R_1 U_2 \sin(\omega t + \varphi) + R_2 U_1 \sin \omega t}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

tehát az R_3 ellenálláson folyó áram két különböző amplitúdójú és fázishelyzetű, azonos frekvenciájú, szinuszosan váltakozó mennyiség összege.

Az időegység alatt fejlődő hő kiszámítható a $P(t) = i_3^2 R_3$ függvény integrálásával, egyszerűbb azonban, ha felhasználjuk, hogy jelen esetben az áram

$$i_3 = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

alakban írható. A felírás jogosságát általános esetre bizonyítjuk.

Keressük B és δ olyan értékét, amelynél bármely időpontban igaz a

$$B \sin(\omega t + \delta) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

egyenlőség. Trigonometrikus átalakítás és a megfelelő összevonás után

$$B \cos \delta \sin \omega t + B \sin \delta \cos \omega t = (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \sin \omega t + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \cos \omega t.$$

Ez csak akkor lehet igaz minden t-re, ha

$$B \cos \delta = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2,$$
$$B \sin \delta = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2,$$

tehát kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk. Megoldása (amely mindig létezik):

$$B = \sqrt{(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2 + (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2} =$$
$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)},$$
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

A váltakozó áramokat azért szemléltetik nagyon gyakran vektorokkal, mert – mint azt fentebb bizonyítottuk – maximális értékük és fázisszögük az összegezés során a vektorok nagyságához, illetve egy adott iránnyal bezárt szögéhez hasonló módon viselkedik.

Ennek alapján az R_3 ellenálláson folyó szinuszosan váltakozó áram effektív értékének négyzete:

$$i^2 = \frac{R_1^2 U_2^2 + 2 R_2^2 U_1^2 + 2 R_1 R_2 U_1 U_2 \cos \varphi}{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)^2}.$$

Az időegység alatt fejlődő hő:

$$P = i^2 R_3 = \frac{R_1^2 U_2^2 + R_2^2 U_1^2 + 2R_1 R_2 U_1 U_2 \cos\varphi}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)^2} R_3,$$

adatainkkal: $P = 0{,}55$ W $= 0{,}13$ cal/s.

A végeredmény csak akkor egyértelmű, ha az időegység elején és végén a feszültségek fázishelyzete ugyanolyan $\left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right.$ az időegység egész számú többszöröse), vagy pedig a frekvencia olyan nagy, hogy a fáziseltérésből adódó különbség kicsi.

Fridler Ferenc (Veszprém, Lovassy L. Gimn., III. o. t.)