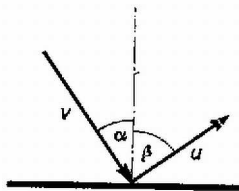


A golyó a lejtőn forgás nélkül egyenletesen gyorsul és  $h$  függőleges elmozdulás után  $v = 2\sqrt{gh}$  sebességgel érkezik a lejtő aljába. Itt a lejtővel és a fallal egyszerre érintkezik, ezekkel bonyolult kölcsönhatásba lép és végül valamilyen irányba kirepül a lejtő és a fal szögletéből. A továbbiakban feltesszük, hogy ez a bonyolult kölcsönhatás lebontható független ütközések sorozatára, vagyis a golyó úgy verődik vissza a falról, mintha a lejtő nem lenne ott, majd az így szerzett sebességgel a lejtőnek ütközik stb. (A feltevés jogosságát ellenőrizhetjük egy olyan számítással, melyben a golyót erős rugókkal összekapcsolt tömegpontoknak tekintjük, és az ütközés lefolyását pontról pontra nyomon követjük.)



1. ábra

Határozzuk meg az egyes ütközések jellemző adatait! Ha egy  $v$  sebességű golyó  $\alpha$  szöggel érkezik egy visszaverő felülethez (1. ábra) és az ütközési szám  $\varepsilon$ , akkor a  $\beta$  visszaverődési szöget és az ütközés utáni  $u$  sebességet a következő jellemzi. A felülettel párhuzamos sebességkomponens változatlan marad:

$$v \sin \alpha = u \sin \beta.$$

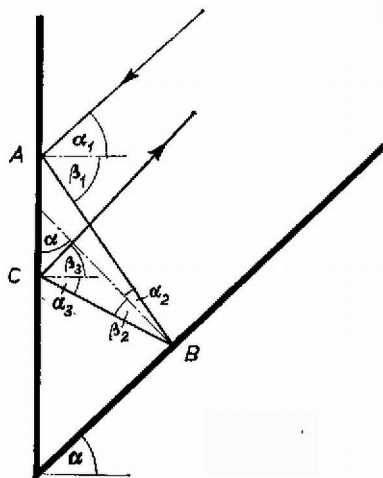
A felületre merőleges komponens  $\varepsilon$ -szorosára változik:

$$\varepsilon v \cos \alpha = u \cos \beta.$$

A fenti egyenletekből látható, hogy

$$(1) \quad \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$

A megváltozott sebesség,  $u = v \sqrt{\sin^2 \alpha + \varepsilon^2 \cos^2 \alpha}$  láthatóan függ  $v$ -n és  $\varepsilon$ -on kívül a beesési szögtől is.



2. ábra

A fentiek alapján az ütközés lefolyása a 2. ábrán láthatóhoz hasonló. A golyó felváltva ütközik a fallal és a lejtővel mindaddig, amíg valamelyik ütközés utáni sebesség vízszintessel bezárt szöge  $\alpha$  és  $90^\circ$  közé nem esik. Ezután a ferde hajítás egyenletei szabják meg a golyó mozgását. Az egyes ütközések közti szakaszok (pl.  $AB$ ,  $BC$ ) nem a golyó tényleges elmozdulását, hanem csak a sebesség irányát jelzik. Mindegyik ütközésnél érvényes az (1) összefüggés, tehát

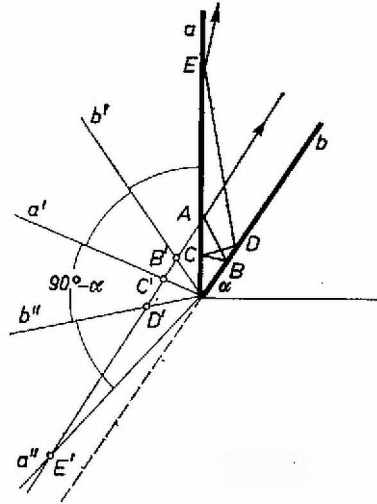
$$(2) \quad \operatorname{tg} \beta_i = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{tg} \alpha_i,$$

valamint a visszaverődés szöge és a következő ütközés beesési szöge közti geometriai feltétel:

$$(3) \quad \alpha_{i+1} = \alpha_i + \beta - 90^\circ.$$

Ezekből az egyenletekből  $\alpha_1 = \alpha$  kezdeti feltétel felhasználásával sorra kiszámíthatók az ütközési szögek.

Ha  $\varepsilon = 1$ , akkor (2) alapján  $\beta_i = \alpha_i$ . Ilyenkor egyszerűbben is megkaphatjuk az ütközések számát és a kirepülés szögét, ha felismerjük az analógiát a síktükrön visszaverődő fénysugár és a feladatban szereplő golyó mozgása között. Tükrözzük a fal  $a$  síkjára a lejtő  $b$  síkját, majd a  $b'$  tükrökre az  $a$  síkot stb. (3. ábra).



3. ábra

A tükörképeken az  $A, B', C', D'$  pontok egy egyenesen helyezkednek el.

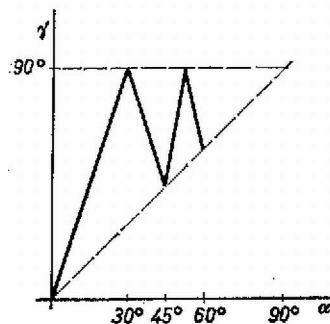
Vezessük be valamely  $x$  szám egész részének jelölésére az  $[x]$  jelet! Az ábráról leolvashatjuk, hogy ha  $n = \left[ \frac{180^\circ}{90^\circ - \alpha} \right]$  páros szám, akkor a kirepülő golyó a lejtő síkjával

$$\left[ 180^\circ - \frac{180^\circ}{90^\circ - \alpha} \right] (90^\circ - \alpha),$$

páratlan  $n$ -re pedig

$$\left[ \frac{180^\circ}{90^\circ - \alpha} \right] (90^\circ - \alpha) - 90^\circ - \alpha$$

szöveget zár be. Ha ábrázoljuk a kirepülő golyó sebességének vízszintessel bezárt szögét  $\alpha$  függvényében, akkor a 4. ábrán látható grafikont kapjuk.



4. ábra

Valahányszor  $\frac{180^\circ}{90^\circ - \alpha}$  egész szám, vagyis

$$\alpha = 90^\circ - \frac{180^\circ}{m}, \quad m = 3, 4, 5, \dots,$$

akkor a függvénynek töréspontjai vannak, ezekben a pontokban felváltva veszi fel a  $90^\circ$  és az  $\alpha$  értéket. A kirepülés sebessége mindig megegyezik  $v$ -vel.

Ha  $\varepsilon \neq 1$ , akkor a fenti gondolatmenet nem alkalmazható, hanem (2) és (3)-ból kell számolni az ütközési szögeket. A rugalmas ütközés tárgyalásánál látott kritikus szögek megfelelőit itt is kiszámíthatjuk. A két és a három ütközést elválasztó határesetben a golyó a fallal párhuzamosan függőlegesen felfelé repül ki. Ez annak felel meg, hogy  $\alpha_3 = 90^\circ$ . Ez viszont

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \varepsilon + 1}}$$

esetben teljesül.  $\varepsilon = 1$  esetben visszkapjuk a már meghatározott  $\alpha = 30^\circ$  értéket,  $\varepsilon = 0,5$ -re pedig  $\alpha = 28,1^\circ$ -ot kapunk. Hasonló módon számítható, hogy  $\alpha = 41,8^\circ$ -nál a golyó háromszor ütközik és a lejtővel párhuzamosan verődik vissza.

*Klebiczki József* (Szeged, SÁGVÁRI E. GIMN., III. o. t. )  
és *Petz Dénes* (Bp., VERES PÁLNÉ GIMN., III. o. t. )

*Megjegyzések.* 1. Miután a golyó elhagyta a szögletet, bizonyos magasságig felrepül. Ez a magasság még  $\varepsilon = 1$  esetben sem egyezik meg az indítási magassággal (mint azt több megoldó az energiatételre való hivatkozással állította, mert a golyónak a pálya tetőpontján mozgási energiája is van) (kivéve azt a két speciális esetet, mikor a golyó valamelyik felülettel párhuzamosan verődik vissza).

2. Abszolút rugalmas golyó esetén  $45^\circ$ -nál kisebb hajlásszögeknel egyszer ütközik a lejtővel és ezután ferde hajítás jön létre.  $45^\circ$ -nál pontosan visszacsúszik a lejtőn,  $45^\circ$ -nál nagyobb szögeknel többszöri visszaverődés után repül ismét ki a szögletből. Ha súrlódás is van, vagy nem abszolút rugalmas a golyó, már  $45^\circ$ -nál kevéssel nagyobb szögek esetén is, „beragad” a szögletbe.