A feladatot a virtuális munka elvével fogjuk megoldani. A gömb külső és belső felületén összesen $W_1 = 2 \cdot 4r^2\pi\alpha$ felületi energia tárolódik, ha a gömb sugara r. Az elektromos energiát kiszámíthatjuk, ha megnézzük, hogy az r sugarú gömb feltöltése közben mennyi munkát végzünk.

Legyen a feltöltés végén a gömb töltése Q_0, és egy lépésben $\Delta Q = \dfrac{Q_0}{n}$ töltést juttassunk felületére. Mint tudjuk, a gömb felületén a potenciál ($R = \infty$-hez képest):

$U = k\dfrac{Q}{r}$, tehát az i-edik ΔQ töltés felvitelekor $\Delta W_i = k\dfrac{Q}{r}\Delta Q$ munkát végzünk, és $Q_i = \dfrac{i}{n}Q_0$. Behelyettesítve $\Delta W_i = k\dfrac{Q_0^2}{r}\dfrac{i}{n^2}$.

Az összes munkavégzés, azaz egy r sugarú Q_0 töltésű gömb elektromos energiája:

$$W_\mathrm{e} = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = k\frac{Q_0^2}{r}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2} \text{ határértéke, ha } n \to \infty.$$

Mivel

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}, \text{ ha } n \to \infty, \text{ azért}$$

$$W_e = \frac{1}{2}k\frac{Q_0^2}{r}.$$

A Q_0 feladatban vizsgált esetben állandó és nagysága a kezdeti feltételekből:

$$Q_0 = \frac{Ur_0}{k}.$$

A buborék teljes energiája:

$$W = W_f + W_e = 8\pi\alpha r^2 + \frac{1}{2}k\frac{Q_0^2}{r} = 8\pi\alpha r^2 + \frac{1}{2}\frac{U^2r_0^2}{k\cdot r}.$$

A virtuális munka elve szerint r olyan értékénél van egyensúly, amelyet Δr-rel megváltoztatva a végzett munka 0, pontosabban a végzett munka Δr-hez képest kicsiny, amin azt értjük, hogy a végzett munka osztva Δr-rel tart 0-hoz, ha $\Delta r \to 0$:

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta r} = 0.$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy a W függvény r szerinti differenciál-hányadosa a szóbanforgó r értéknél 0. r szerint differenciálva W-t tehát a következő feltételt kapjuk:

$$16\pi r\alpha - \frac{U^2r_0^2}{2k}\frac{1}{r^2} = 0. \qquad \text{Megoldva } r\text{-re:}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{U^2r_0^2}{32k\pi\alpha}}, \qquad \text{adatainkkal } r = 0{,}71 \text{ cm}.$$

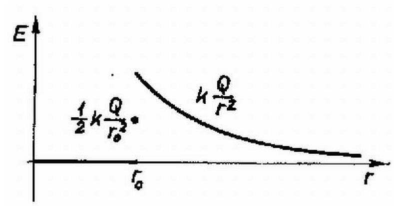
Terlaky Edit (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Megfigyelhetjük, hogy az egyensúly beálltával a buborék összes energiája kisebb lesz, mint kezdetben (a virtuális munka elvével éppen a potenciális energia minimumát kerestük meg). Kérdés, hogy hová lett az elveszett energia? Ez részben a levegő mozgatásához (kifújásához, illetve beszívásához) használódik el, részben a belső súrlódás miatt hővé alakul. Ha ezek a veszteségek kicsik, a buborék sokáig rezeg az egyensúlyi helyzet közelében. Az ilyen állapotban levő buborékkal bizonyos szempontból modellezhető a nagyobb atommagok viselkedése.

Akik – figyelmen kívül hagyva a mozgási energiákat – az energiamegmaradás törvényét írták fel, a kapott másodfokú egyenletből tulajdonképpen a legegyszerűbb rezgési állapot két szélső helyzetét számították ki és ezzel a feltett kérdésre helytelen választ adtak.

2. Sokan próbálták a feladatot közvetlenül a felületet összehúzó erők és az elektromos taszító erők egyensúlyával megoldani. Ez legtöbbször azért nem sikerült, mert – felhasználva azt a tapasztalatot, hogy a töltött gömb *külső* töltésre úgy hat, mintha egész töltése középpontjában lenne – feltételezték, hogy a gömb *felületén* levő ΔQ töltésre $F = k\dfrac{Q\Delta Q}{r^2}$ erő hat. A gondolatmenet helytelensége könnyen belátható, ha észrevesszük, hogy ugyanilyen joggal állíthatjuk, hogy a ható erő 0. (Ugyanis a gömb *belsejében* a térerősség 0.)

A virtuális elmozdulások segítségével vagy a többi töltés hatásának összegzésével (integrálással) bizonyítható, hogy a felületen ΔQ töltésre $F = \dfrac{1}{2}k\dfrac{Q\Delta Q}{r^2}$ erő hat, tehát egy feltöltött vezető gömb elektromos térerősségének távolságfüggése legjobban az ábrán szemléltethető.



E függvény furcsa szerkezetének magyarázata: az elektromosan töltött vezető gömb vizsgálatánál feltételeztük, hogy az egész töltés a gömb felületén 0 cm vastagságú rétegben helyezkedik el.