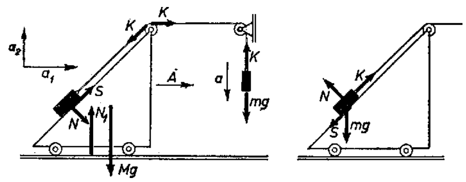
Vizsgáljuk meg, hogy milyen erők hatnak az egyes testekre (1. ábra).



1. ábra

A kötélen lógó testre hat a súlyerő (mg), a kötélerő (K), a lejtő hatása: N nyomóerő és S súrlódási erő, feltételezve, hogy a test fölfelé mozog a lejtőn. Az ékre ható erők: a súlyerő (Mg), a talaj nyomóereje (N_1), a csigánál fellépő két kötélerő (K) és az m tömegű test hatása (N és S). (Az ábra az áttekinthetőség kedvéért két részből áll.)

A kötélen lógó test gyorsulása legyen a, az éké A. A harmadik test gyorsulásának sem a nagysága, sem az iránya nem ismert. Jelöljük ezért a gyorsulás vízszintes komponensét a_1-gyel, függőleges komponensét a_2-vel. A pozitív irányok az 1. ábrán adottak.

A három testre öt mozgásegyenletet írhatunk fel:

$$ma = mg - K, \tag{1}$$

$$MA = K - \frac{K}{\sqrt{2}} + \frac{S}{\sqrt{2}} + \frac{N}{\sqrt{2}}, \tag{2}$$

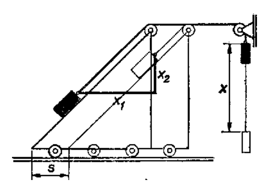
$$0 = Mg - N_1 + \frac{N}{\sqrt{2}} - \frac{S}{\sqrt{2}} + \frac{K}{\sqrt{2}}, \tag{3}$$

$$ma_1 = \frac{K}{\sqrt{2}} - \frac{N}{\sqrt{2}} - \frac{S}{\sqrt{2}}, \tag{4}$$

$$ma_2 = -mg - \frac{S}{\sqrt{2}} + \frac{K}{\sqrt{2}} + \frac{N}{\sqrt{2}}. \tag{5}$$

(Az egyszerűség kedvéért sin 45° és cos 45° helyett $1/\sqrt{2}$-t írtunk.)

A gyorsulások azonban nem függetlenek egymástól: a közöttük levő összefüggések kifejezik, hogy a kötél nyújthatatlan és az egyik m tömegű test végig a lejtő lapján marad. A 2. ábrán lerajzoltuk a testeket az indulás pillanatában és t idővel később.



2. ábra

A testek elmozdulásait az ábra szerint x, s, x_1 és x_2-vel jelöljük. A kötél hossza változatlan

$$x = s + x_2\sqrt{2}, \tag{6}$$

a test az ék felületén marad:

$$x_1 - s = x_2. \tag{7}$$

Az

$$x = (1/2)at^2, \qquad s = (1/2)At^2, \qquad x_1 = (1/2)a_1t^2, \qquad x_2 = (1/2)a_2t^2 \tag{8}$$

összefüggéseket behelyettesítve megkapjuk a kényszeregyenleteket:

$$a = A + a_2\sqrt{2}, \tag{9}$$

$$a_1 - A = a_2. \tag{10}$$

Amennyiben a test valóban felfelé mozog a lejtőn, a súrlódási erő

$$S = \mu N. \tag{11}$$

Az (1), (2), (3), (4), (5), (9), (10) és (11) egyenletekből álló egyenletrendszer nyolc ismeretlent tartalmaz, megoldható. Az egyetlen gyök, amire szükségünk van

$$A = g\frac{3+\mu(1+\sqrt{2})}{5-2\sqrt{2}+4M/m+\mu(1+\sqrt{2})}. \tag{12}$$

Az egyenletrendszer megoldásának utolsó előtti lépését még fel fogjuk használni:

$$A(2-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mu-4a = g(-2+\sqrt{2}+\sqrt{2}\mu). \tag{13}$$

Kérdéses azonban, hogy feltételezéseink valóban teljesülnek-e. A mozgás a tömegektől és a súrlódási együtthatóktól függően háromféleképpen történhet: a lejtőn levő test felfelé mozog (ebben az esetben oldottuk meg a feladatot); a test lefelé mozog; a lejtővel összetapad.

Vizsgáljuk meg a három esetet elválasztó határokat. Az, hogy a test az éken lefelé vagy felfelé mozog, a súrlódástól független. Nagy súrlódási együttható esetén a súrlódás legfeljebb megállítja a relatív mozgást, de ellenkező irányút nem hozhat létre. Így ebből a szempontból $\mu=0$-nál vizsgáljuk a mozgást. A határeset (a két test együtt mozog) az $A=a$ összefüggéssel jellemezhető. Ezt és $\mu=0$-t a (12) és (13) összefüggésekbe helyettesítve megkaphatjuk a határeset feltételét: $M/m = 1+2\sqrt{2} = 3{,}83$. Ha tehát $M/m > 3{,}83$, a test felfelé mozoghat az éken, ha $M/m < 3{,}83$, lefelé.

Az $M/m > 3{,}83$ esetben érvényes a (12) és (13) összefüggés. Ha μ elég nagy (nevezzük a határesetben μ_1-nek), a relatív mozgás megszűnik, a (11) egyenlet érvényét veszti, helyére az $A=a$ egyenlőség kerül. Határesetben, ha $\mu=\mu_1$, még érvényes a (12) és (13) egyenlet, de már az $A=a$ is teljesül. Innen megkaphatjuk μ_1 értékét:

$$\mu_1 = \sqrt{2}-1-\frac{2}{1+M/m}. \tag{14}$$

Hasonlóan járhatunk el az $M/m > 3{,}83$ esetben. Nevezzük el a kritikus súrlódási együtthatót μ_2-nek. A (12) és (13) egyenletekbe μ helyett írjunk mindenütt $-\mu$-t, hiszen a súrlódási erő előjelet vált. A kritikus súrlódási együtthatóra

$$\mu_2 = -\sqrt{2}+1+\frac{2}{1+M/m} \tag{15}$$

adódik. Az ék gyorsulása ebben az esetben (12) alapján

$$A = g\frac{3-\mu(1+\sqrt{2})}{5-2\sqrt{2}+4M/m-\mu(1+\sqrt{2})}. \tag{16}$$

Amennyiben az ék és a rajta levő test összetapad, azokat egyetlen merev testnek tekinthetjük, vagyis az ék gyorsulása

$$A = g\frac{m}{M+2m}. \tag{17}$$

Összefoglalva megoldásunkat, tetszőleges számadatok esetén
ha $M/m \ge 3{,}83$ és $\mu \le \mu_1$, akkor a (12),
ha $M/m \ge 3{,}83$ és $\mu \ge \mu_1$, akkor a (17),
ha $M/m \le 3{,}83$ és $\mu \le \mu_2$, akkor a (16),
ha $M/m \le 3{,}83$ és $\mu \ge \mu_2$, akkor a (17) képletből kell A értékét kiszámítani.

Számadatainkkal $M/m = 10 > 3{,}83$, (14) alapján $\mu_1 = 0{,}23$. Így ha $\mu = 0{,}1 < \mu_1$, a (12) képletből $A = 0{,}076\ g$, ha $\mu = 0{,}4 > \mu_1$, a (17) képletből $A = 0{,}083\ g$.

Komornik Vilmos (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)
Sailer Kornél (Ózd, József A. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján