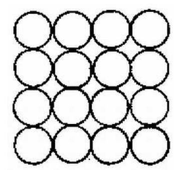
A ϱ átlagsűrűség meghatározása visszavezethető az edényben levő golyók számának meghatározására. Ha ugyanis a ϱ_0 sűrűségű golyókból N darab fér el a V térfogatú edényben, akkor

$$\frac{4R^2\pi}{3}N\varrho_0 = \varrho V. \tag{1}$$

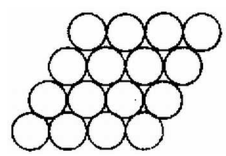
Az edényben elhelyezhető golyók száma függ a golyók térbeli elrendeződésétől. Három jellegzetes elrendezéssel foglalkozunk.

I. Minden golyó 6 másikkal érintkezik. Az egy rétegben elhelyezkedő golyók középpontjai négyzethálózatot alkotnak és a következő rétegek golyói is pontosan e fölött helyezkednek el (1. ábra).



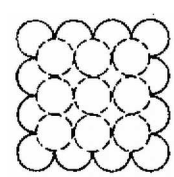
1. ábra

II. Minden golyónak 8 szomszédja van. Az egy réteghez tartozó golyók középpontjai rombuszhálózatot alkotnak és a következő réteg ismét pontosan az alatta levő fölé kerül (2. ábra).



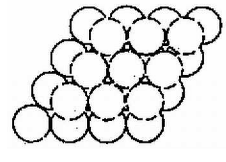
2. ábra

III. Minden golyó 12 másikkal érintkezik. Az egyes rétegek négyzethálós szerkezetűek, de a következő réteg golyói a szaggatott vonallal megjelölt helyekre kerülnek (3. ábra).



3. ábra

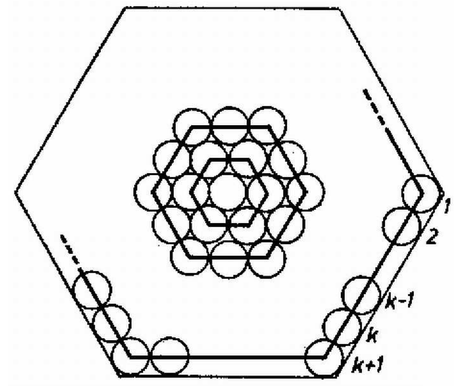
Ugyanennek az elrendezésnek másik nézete a 4. ábrán látható.



4. ábra

A fenti három elrendezés tetszőleges alakú edény középső részében megvalósítható, az edény falánál azonban a szabályos elrendeződés (az edény alakjától függő mértékben) elromlik.

Határozzuk meg az m magasságú hatszög alapú hasábban elhelyezhető golyók számát! A hatszög oldalélét az egyszerűség kedvéért vegyük $\left(2k + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot R$-nek, ekkor ugyanis egy oldalél mentén pontosan $k+1$ golyó fér el.



5. ábra

Számoljuk össze az 5. ábrán látható golyókat, melyek egy réteget alkotnak! A középponttól kiindulva hatszögenként leszámolhatjuk a golyókat:

$$n = 1 + 6 + 12 + \ldots + 6k = 1 + 6\frac{k(k+1)}{2} = 3k^2 + 3k + 1.$$

Ha a II. elrendezést valósítjuk meg, akkor ugyanilyen rétegek ismétlődnek $\left[\frac{m}{2R}\right]$-szer. (Az $[x]$ jelölés az x szám egész részét jelenti.) Az edény térfogata

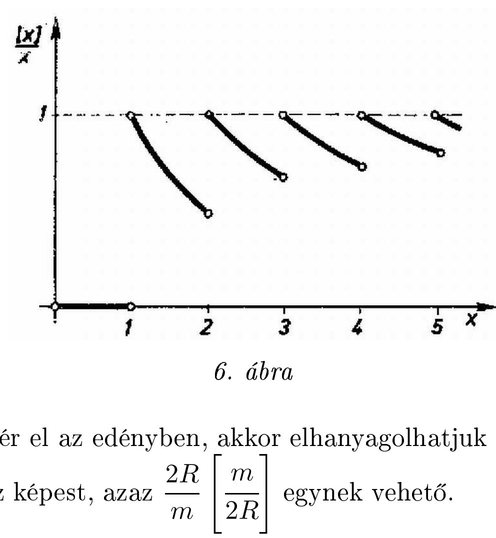
$$V = \left(2k + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3m = 6\sqrt{3}\left(k + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 R^2 m.$$

Az edényben levő golyók száma
$N = (3k^2 + 3k + 1)\left[\frac{m}{2R}\right]$, így (1) felhasználásával

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\frac{4R^3\pi}{3}(3k^2+3k+1)\left[\frac{m}{2R}\right]}{6\sqrt{3}\left(k+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 R^2 m} = \frac{1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{3k^2}}{\left(1 + \frac{1}{k\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{\left[\frac{m}{2R}\right]}{\frac{m}{2R}} \cdot \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \tag{2}$$

A fenti eredmény három tényezőjének külön-külön szemléletes jelentése van. Az első tört értéke csak k-tól függ, és azt fejezi ki, hogy a hasáb palástjánál nem olyan jó a térkitöltés, mint a test belsejében. A tört értéke egynél mindig kisebb, de tetszés szerinti előírt pontossággal megközelíti azt, ha k elég nagy (pl: $k = 1$, 2, 3, 100-ra a tört értéke 0,93; 0,95; $0,96$; 0,998).

A második tényező a sűrűségnek a magasságtól való függését írja le állandó k mellett, vagyis a *d)* kérdésre adja meg a választ. A 6. ábrán látható, hogy az $\frac{[x]}{x}$ függvény értéke legfeljebb 1 lehet.



6. ábra

Ha $m \gg R$, vagyis ha sok réteg fér el az edényben, akkor elhanyagolhatjuk a legfelső réteg felett esetleg szabadon maradó helyet az edény térfogatához képest, azaz $\frac{2R}{m}\left[\frac{m}{2R}\right]$ egynek vehető.

A harmadik tényező jellemzi a térkitöltés jóságát. Ha $k \gg 1$ és $m \gg R$, akkor

$$\varrho = \varrho_0 \cdot \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \tag{3}$$

Vizsgáljuk meg a III. elrendezést! A 4. ábrának megfelelően elhelyezett golyóknál minden második rétegbe csak $3k^2$ golyó fér el, viszont a rétegek távolsága egy $2R$ oldalélű tetraéder magassága, azaz $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R$. Az előző számoláshoz hasonlóan

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\frac{4R^3\pi}{3} \cdot \frac{(3k^2+3k+1)+3k^2}{2}\left\{\left[\frac{m-2R}{2\sqrt{2}R}\sqrt{3}\right]+1\right\}}{6\sqrt{3}\left(k+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 R^2 m}. \tag{4}$$

Ha $m \gg R$ és $k \gg 1$, akkor

$$\varrho = \varrho_0 \cdot \frac{\pi}{6}\sqrt{2}. \tag{5}$$

Vizsgáljuk meg az I. elrendezést négyzet alapú hasábra! Egy rétegbe k^2 golyó fér el, a rétegek száma $\left[\frac{m}{2R}\right]$ az edény térfogata $(2kR)^2 m$, tehát

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\frac{4R^3\pi}{3}k^2 \cdot \left[\frac{m}{2R}\right]}{(2kR)^2 m} = \frac{\left[\frac{m}{2R}\right]}{\frac{m}{2R}} \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Érdekes, hogy most k-tól független a sűrűségek aránya. Ennek az az oka, hogy az edény alakja jól illeszkedik az elrendeződés négyzetes szimmetriájához és így a felületen sem rosszabb a térkitöltés, mint az edény belsejében. Hatszög alapú hasábra kiszámolva ugyanezt, ismét megjelenne egy k-tól függő egynél kisebb szorzótényező.

A fentiek alapján már valamennyi kérdésre választ tudunk adni.

a) Ha a golyók méretét n-ed részére csökkentjük, akkor valamennyi képletben k helyére $n \cdot k$-t, R helyébe $\frac{R}{n}$-t kell írni. Az átlagsűrűség változását a II. elrendezésnél (2) írja le. A golyók méretét csökkentve belátható, hogy az első tényező biztosan növekszik. A második tényező sem csökkenhet, hiszen érvényes az $[nx] \geq n[x]$ egyenlőtlenség. Tehát az átlagsűrűség növekszik, de ez a növekedés $k \gg 1$, $m \gg R$ esetben elhanyagolhatóan kicsi.

b) A fém sűrűségét k, m értékének, valamint az elrendeződés jellegének ismeretében lehet meghatározni. Ha $k \gg 1$ és $m \gg R$, akkor a három elrendeződésnél (az edény alakjától függetlenül) rendre

$$\text{I.} \quad \varrho_0 = \frac{6}{\pi}\varrho = 13\ \text{g/cm}^3; \qquad \text{II.} \quad \varrho_0 = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\varrho = 11{,}2\text{g/cm}^3;$$
$$\text{III.}\varrho_0 = \frac{3\sqrt{2}}{\pi}\varrho = 9{,}2\text{g/cm}^3.$$

c) Ha $k \gg 1$ és $m \gg R$, akkor a térkitöltés jóságát a $\pi/6$, $(\pi/3)\sqrt{3}$ és $(\pi/6)\sqrt{2}$ számok jellemzik. A legjobb térkitöltést a III. elrendezés adja. Ha a golyók száma kicsi, akkor a felület közelében található hibák hatása jelentős és a legkedvezőbb térkitöltést az edény alakjához legjobban illeszkedő elrendezés adja. Ez hatszög alapú hasábnál a II., négyzet alapú hasábnál az I. elrendezés. Azt a k értéket, amelyiknél a legsűrűbb térkitöltés elrendeződés-változást igényel, a (2), illetve (4) típusú kifejezésekből lehet meghatározni.

Megjegyzés. A kitűzésben $(2k+1)R$ oldalélű hatszög szerepelt. Ezt nem lehet szorosan kirakni golyókkal, ezért számoltunk más értékkel. Az ebből adódó eltérések a megoldás lényegét nem érintik és így az elért pontokat nem változtatták meg.