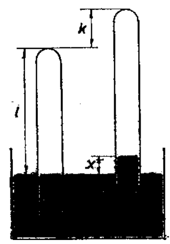
A higany az emelés előtt azonos szinten van az üvegcsövön belül és kívül. Ekkor a külső levegő p nyomása egyenlő az üvegcsőben levő levegő nyomásával. Jelöljük x-szel a higanyoszlop magasságát a csőben az emelés után!



k nagyságú emelés után írjuk fel a Boyle – Mariotte törvényt az üvegcsőben levő levegőre:

(1) $$pAl = p_1A(l+k-x).$$

(Itt A az üvegcső keresztmetszete, p_1 pedig a belső levegő nyomása az emelés után.)

Az emelés után az üvegcsőben levő higanyoszlop és az üvegcsőben levő levegő nyomása tart egyensúlyt a külső légnyomással. Ha nyomásegységnek a Hgmm-t választjuk, akkor a nyomások egyensúlya a következő alakú:

(2) $$p = p_1 + x.$$

Ebből p_1 egyszerűen kifejezhető. Behelyettesítjük (1)-be, így másodfokú egyenlethez jutunk:

$$x^2 - x(p+k+l) + pk = 0.$$

Két megoldás van:

$$x = \frac{(p+k+l) \pm \sqrt{(p+k+l)^2 - 4pk}}{2}.$$

A $+$ jelnek megfelelő megoldásnak nincsen fizikai értelme, hiszen

$$\frac{p+k+l+\sqrt{(p+k+l)^2-4pk}}{2} = \frac{p+k+l+\sqrt{(k+l-p)^2+4pl}}{2} \geq$$
$$\geq \frac{p+k+l+(k+l-p)}{2} = k+l,$$

tehát szükségképpen

$$x = \frac{p+k+l-\sqrt{(p+k+l)^2-4pk}}{2} = \frac{p+k+l-\sqrt{(k+l-p)^2+4pl}}{2}$$

Erről egyébként a következőket láthatjuk be:

$$x = \frac{p+k+l-\sqrt{(p+k+l)^2-4pk}}{2} \geq \frac{p+k+l-\sqrt{(p+k+l)^2}}{2} = 0,$$
$$x = \frac{p+k+l-\sqrt{(k+l-p)^2+4pl}}{2} \leq \frac{p+k+l-(k+l-p)}{2} = p.$$

Megemlítjük még, hogy az előbbiekben feltételeztük, hogy az üvegcső elég hosszú.

Klebinczki József (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A kitűzött feladatban mellékeffektusok is felléphetnek. Ilyen pl. a kapillaritás jelensége. Ezt a görbületi nyomással vehetjük figyelembe. Legyen a görbületi nyomás $p_{\mathrm{g}} = 2\alpha/R$, ahol α a felületi feszültség, R pedig a felület görbületi sugara. Így

$$p = p_1 + x + p_{\mathrm{g}} \qquad \text{(nyomások egyensúlya)},$$

$Al \cdot (p - p_{\mathrm{g}}) = A(l+k-x)p_1$ (Boyle – Mariotte törvény).

Az ezekből származtatható egyenlet $x^2 - x\big[l+k+(p-p_{\mathrm{g}})\big] + k(p-p_{\mathrm{g}}) = 0$. Legyen $p_{\mathrm{eff}} = p - p_{\mathrm{g}}$. Ekkor a megoldás most is az előbbihez hasonló alakú:

$$x = \frac{(l+k+p_{\mathrm{eff}}) - \sqrt{(l+k+p_{\mathrm{eff}})^2 - 4p_{\mathrm{eff}}k}}{2}.$$

A görbületi nyomást tehát egyszerűen le kell vonni a külső légnyomásból.

Guoth János (Bp., Radnóti M. Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

2. Egy másik mellékeffektus az, hogy véges kiterjedésű tál esetén a külső higanyszint lesüllyed, miközben a belső megemelkedik. Ha A_1 a cső keresztmetszete, A_2 a tálé, akkor a megemelés után a higany felszíne $\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right)x$ értékkel lesz magasabban a csőben, mint a tálban. (Itt x a higany felszínének a kiindulási állapothoz viszonyított emelkedését jelenti.) A két egyenlet most

$$p = p_1 + x\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right).$$

$$A_1 l \cdot p = (k+l-x)A_1 \cdot p_1.$$

Ezekből az egyenlet x-re:

$$x^2\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right) - x\left[\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right)(l+k)+p\right] + pk = 0.$$

Mivel $1+\frac{A_1}{A_2} \neq 0$, így

$$x^2 - x\left[l+k+\frac{p}{1+\frac{A_1}{A_2}}\right] + k\cdot\frac{p}{1+\frac{A_1}{A_2}} = 0.$$

Legyen $p_{\text{eff}} = \frac{p}{1+\frac{A_1}{A_2}}$, a megoldás alakja most is

$$x = \frac{(l+k+p_{\text{eff}}) - \sqrt{(l+k+p_{\text{eff}})^2 - 4p_{\text{eff}}k}}{2}.$$

Vegyük észre, hogy gyökeresen különböző jelenségeket tudunk leírni ugyanazzal a formális kifejezéssel azáltal, hogy a betűk jelentése megváltozott. (Ebben az esetben a tál véges kiterjedésének figyelembevétele úgy jelentkezett az egyenletben, mintha a külső p nyomás lecsökkent volna egy p_{eff} nyomásra.) Bonyolultabb fizikai feladatok megoldásánál is gyakran szokásos hasonló fogással élni. Ez az alapja az ún. „effektív mennyiségek" bevezetésének, amelyek így sok esetben egyszerűsítik a számításokat.

Juhász Tibor (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján