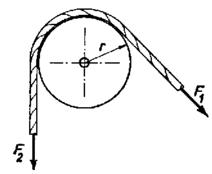
A feladatot úgy fogjuk megoldani, hogy a vizsgált szerkezetet képzeletben részekre bontjuk és minden részre külön-külön felírjuk a nyugalom feltételét:

a ható erők összege 0,
a forgatónyomatékok összege 0.

A rendszert annyi darabra bontjuk szét, hogy végül a megoldáshoz elég egyenlet álljon rendelkezésünkre.

Először bebizonyítjuk, hogy ha egy merev rúd valamely keresztmetszetében valamilyen – tetszőleges irányú – F erő hat, akkor ugyanez az erő feszíti a rúd minden keresztmetszetét addig, amíg a rúdra külső erő nem hat.

Nézzük a rúd egy kis darabját! Feltételezésünk szerint erre a darabra csak a rúd jobb és bal oldali folytatása hat. Ha az egyik végén (pl. a bal oldalin) a bal oldali rész K erővel hat a darabra, akkor ahhoz, hogy a darab nyugalomban maradjon, másik végén ellentétes irányú, azonos nagyságú erőnek kell hatnia, mert a ható erők összege 0. Ha a rúd jobb oldali része a vizsgált darabra K erővel hat, akkor a vizsgált darab a rúd jobb oldali részére ellentétes irányú, azonos nagyságú erővel (hatás-ellenhatás törvénye), azaz K-val hat. Beláttuk, hogy ha a rúd bal oldali része K erővel hat a rúd egy darabjára, akkor ez a darab a K erőt továbbítja a rúd jobb oldali része felé.



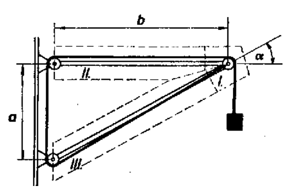
1. ábra

Írjuk fel a csigára ható forgatónyomatékok összegét (1. ábra):

$$M = F_1 r - F_2 r = 0.$$

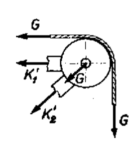
Ebből $F_1 = F_2$, azaz kijelenthetjük, hogy ha valahol a kötél irányt változtat, akkor a csigára két egyenlő nagyságú kötélerő hat.

Az előbbi gondolatmenethez hasonló módon azt is bebizonyíthatjuk, hogy ezen erők nagysága G (ha $G = 150$ kp, a kötélre akasztott test súlya). A kötélben ható erő azért mindig kötélirányú, mert a kötél – ellentétben a merev rúddal – forgatónyomaték hatására elgörbül.



2. ábra

a) A konzol szaggatott vonallal határolt részeit (2. ábra) külön vizsgáljuk.

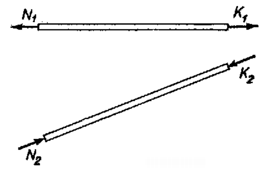


3. ábra

Az egyensúly feltétele az I. részre (3. ábra; a vízszintes rúdban ható erőt K_1-gyel, a ferde rúdban hatót K_2-vel, a reakcióerőket K_1', K_2'-vel, a függőleges, illetve vízszintes komponenseket – melyeket az ábrán nem tüntettünk fel – y, illetve x indexszel jelöljük):

(Ia) $$K'_{2\mathrm{x}} - K'_{1\mathrm{x}} - G - G\cos\alpha = 0,$$

(Ib) $$K'_{2\mathrm{y}} - K'_{1\mathrm{y}} - G - G\sin\alpha = 0.$$



4. ábra

A II. és III. részre (4. ábra):

$$\text{(II)} \qquad K_{1\text{y}} \cdot b = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad K_{2\text{x}} \cdot a - K_{2\text{y}} \cdot b = 0.$$

Az I. egyenletcsoportnál nem kellett felhasználni a forgatónyomatékok összegét, a II. és III.-nál az erők összegét.
Tudjuk, hogy K_1, K_1', valamint K_2, K_2' egymás reakcióerői, ezért

$$K_{1\text{x}} = K'_{1\text{x}}, \quad K_{1\text{y}} = K'_{1\text{y}}, \quad K_{2\text{x}} = K'_{2\text{x}}, \quad K_{2\text{y}} = K'_{2\text{y}}.$$

A II. és III. egyenletekből következik, hogy a K_1 és K_2 erő a rúd irányában hat.
Az egyenletrendszer megoldva

$$K_{1\text{x}} = G\left(\frac{b}{a} - 1\right) = 110 \text{ kp}, \qquad K_{1\text{y}} = 0,$$

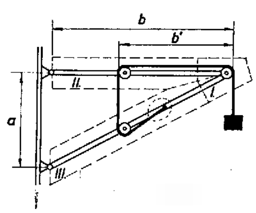
$$K_{2\text{x}} = G\left(\frac{b}{a} + \cos\alpha\right) = 390 \text{ kp}, \qquad K_{2\text{y}} = G(1 + \sin\alpha) = 215 \text{ kp}.$$

Ezzel a rudakban ható erőket teljesen meghatároztuk. Célszerű kiszámítani az erők nagyságát és irányát is:

$$K_1 = G\left(\frac{b}{a} - 1\right) = 110 \text{ kp} \qquad \alpha_1 = 0°,$$

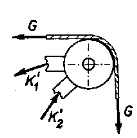
$$K_2 = G(1 + \sin\alpha)\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} = 450 \text{ kp}, \qquad \alpha_2 = 210°.$$

(α_1 α_2 az erők vízszintessel bezárt szöge, az óramutató járásával ellentétes irányban mérve.)

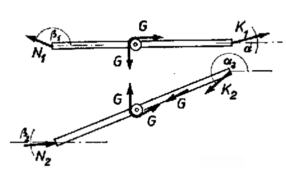


5. ábra

b) Az előzőhöz hasonló felbontást alkalmazva (5. ábra) ismét felrajzoljuk a megfelelő részekre ható erőket (6., 7. ábra), és felírjuk az egyensúly feltételét.



6. ábra



7. ábra

(Ia) $$K'_{2x} - K'_{1x} - G = 0,$$

(Ib) $$K'_{2y} - K'_{1y} - G = 0,$$

(IIa) $$-N_{1x} + G + K_{1x} = 0,$$

(IIb) $$N_{1y} - G + K_{1y} = 0,$$

(IIc) $$-N_{1y} \cdot b + G \cdot b' = 0,$$

(IIIa) $$N_{2x} + G\cos\alpha - G\cos\alpha - K_{2x} = 0,$$

(IIIb) $$N_{2y} = G + G\sin\alpha - G\sin\alpha - K_{2y} = 0,$$

(IIIc) $$-N_{2y} \cdot b + N_{2x} \cdot a - G \cdot b' = 0.$$

Továbbá $K_{1x} = K'_{1x},\ K_{1y} = K'_{1y},\ K_{2x} = K'_{2x},\ K_{2y} = K'_{2y}$.

Az egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy a vízszintes rúdban a két csiga közötti részen

$$K_{1x} = G\left(\frac{b}{a} - 1\right) = 110 \text{ kp}, \qquad K_{1y} = G\left(1 - \frac{b'}{b}\right) = 45 \text{ kp};$$

$$K_1 = 118 \text{ kp} \qquad a_1 = 22°,$$

a középső csiga és a fal között

$$N_{1x} - G\frac{b}{a} = 260 \text{ kp}, \qquad N_{1y} = G\frac{b'}{b} = 105 \text{ kp};$$

$N_1 = 280$ kp, $\beta_1 = 158°$ nagyságú és irányú erő hat.

A ferde rúdban a végén levő csiga és a kötél vége közötti részen

$$K_{2x} = G\frac{b}{a} = 260 \text{ kp}, \qquad K_{2y} - G\left(2 - \frac{b'}{b}\right) = 195 \text{ kp};$$

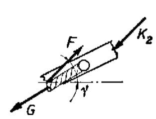
$$K_2 = 325 \text{ kp}, \qquad \alpha = 217°,$$

a középső csiga és a fal között

$$N_{2x} = G\frac{b}{a} = 260 \text{ kp}, \qquad N_{2y} - G\left(1 - \frac{b'}{b}\right) = 45 \text{ kp};$$

$N_2 = 264$ kp, $\beta = 3°$, nagyságú és irányú erő hat.

Tisztázni kell még, hogy milyen erő hat a ferde rúdban a középső csiga és a kötél vége közötti részen.



8. ábra

Vizsgáljuk a rúdnak az 5. ábrán bekarikázott részét (8. ábra):

$$F_x - G\cos\alpha - K_{2x} = 0,$$

$$F_y - G\sin\alpha - K_{2y} = 0.$$

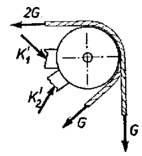
Ebből a keresett erő:

$$F_x = G\left(\frac{b}{a} + \cos\alpha\right) = 390 \text{ kp},$$

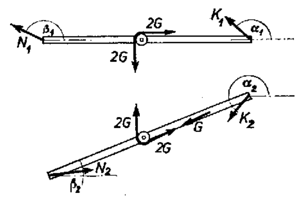
$$F_y = G\left(2 - \frac{b'}{b} + \sin\alpha\right) = 270 \text{ kp};$$

$$F = 470 \text{ kp}, \qquad \gamma = 34°.$$

c) Az előző két megoldáshoz hasonló módon járunk el. Természetesen, két azonos helyen ható, párhuzamos, G nagyságú erő helyettesíthető $2G$-vel (9., 10. ábra).



9. ábra



10. ábra

(Ia) $$K'_{2\mathrm{x}} + K'_{1\mathrm{x}} - G\cos\alpha - 2G = 0,$$

(Ib) $$K'_{2\mathrm{y}} - G\cdot\sin\alpha - G - K'_{1\mathrm{y}} = 0,$$

(IIa) $$-N_{1\mathrm{x}} + 2G - K_{1\mathrm{x}} = 0,$$

(IIb) $$N_{1\mathrm{y}} - 2G + K_{1\mathrm{x}} = 0,$$

(IIc) $$-N_{1\mathrm{y}}\cdot b + 2G\cdot b' = 0,$$

(IIIa) $$N_{2\mathrm{x}} + 2G\cos\alpha - G\cos\alpha - K_{2\mathrm{x}} = 0,$$

(IIIb) $$-N_{2\mathrm{y}} + 2G + 2G\sin\alpha - G\sin\alpha - K_{2\mathrm{y}} = 0,$$

(IIIc) $$-N_{2\mathrm{y}}\cdot b + 2G\cdot b' - N_{2\mathrm{x}}\cdot a = 0.$$

Megoldva az egyenletrendszert, a ható erők a vízszintes rúdban a két csiga közötti részen:

$$K_{1\mathrm{x}} = G\left(2 - \frac{b}{a}\right) = 40\ \mathrm{kp}, \qquad K_{1\mathrm{y}} = 2G\left(1 - \frac{b'}{b}\right) = 90\ \mathrm{kp};$$
$$K_1 = 98{,}5\ \mathrm{kp}, \qquad \alpha_1 = 109^\circ,$$

a középső csiga és a fal közötti részen:

$$N_{1\mathrm{x}} = G\frac{b}{a} = 260\ \mathrm{kp}, \qquad N_{1\mathrm{y}} = 2G\frac{b'}{b} = 210\ \mathrm{kp};$$
$$N_{1\mathrm{x}} = 334\ \mathrm{kp}, \qquad \beta_1 = 141^\circ,$$

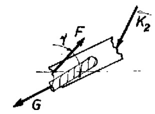
a ferde rúdban a végén levő csiga és a kötél vége közötti részen:

$$K_{2\mathrm{x}} = G\left(\frac{b}{a} + \cos\alpha\right) = 390\ \mathrm{kp}, \qquad K_{2\mathrm{y}} = G\left(3 - 2\frac{b'}{b} + \sin\alpha\right) = 315\ \mathrm{kp};$$
$$K_2 = 500\ \mathrm{kp}, \qquad \alpha_2 = 219^\circ,$$

a fal és a középső csiga közötti részen:

$$N_{2\mathrm{x}} = G\frac{b}{a} = 260\ \mathrm{kp}, \qquad N_{2\mathrm{y}} = 2\left(\frac{b'}{b} - 1\right) = 60\ \mathrm{kp};$$
$$N_2 = 267\ \mathrm{kp}, \qquad \beta_2 = 13^\circ,$$

A középső csiga és a kötél vége közötti részen ható erő meghatározásához vizsgáljuk a ferde rúd 5. ábrán bekarikázott részét (11. ábra):



11. ábra

$$F_x - G\cos\alpha - K_{2x} = 0,$$
$$F_y - G\sin\alpha - K_{2y} = 0.$$

Ebből

$$F_x = G\left(\frac{b}{a} + 2\cos\alpha\right) = 520\ \text{kp}, \qquad F_y = G\left(3 - 2\frac{b'}{b} + 2\sin\alpha\right) = 390\ \text{kp};$$

$$F = 650\ \text{kp}, \qquad \gamma = 37^\circ,$$

Herényi Levente (Bp., I. István Gimn. II. o. t.)
Gács Lajos (Bp., Landler Jenő Techn., II. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Ilyen jellegű feladatok megoldásánál ajánlatos részletes rajzot készíteni a ható erőkről. Az erők irányát szabadon választhatjuk, célszerű azonban – a nagyobb szemléletesség kedvéért – úgy megválasztani őket, hogy komponenseikre pozitív értéket kapjunk. Ezt tettük ennél a megoldásnál is.

2. Mint láthattuk, az *a)* feladat kivételével a rudakban ható erők sehol sem voltak rúdirányúak. Éppen ezért kaptak helytelen eredményt azok, akik – minden indoklás nélkül – a ható erőknek rúdirányú komponensekre való bontásával próbálták a feladatot megoldani.