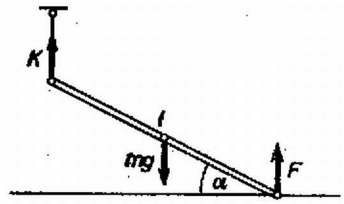
A fonál elégetése előtt a rúdra K kötélerő, a talaj F nyomóereje és mg súlyerő hat. A rúd nyugalomban van, ezért az erők eredője és a forgatónyomatékok összege nulla.



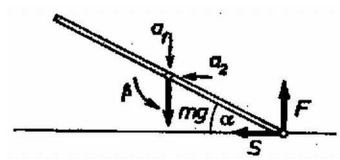
1. ábra

A talaj és a rúd közt fellépő F erő csak függőleges lehet, hiszen a másik két erő is függőleges (1. ábra), így

$$K + F - mg = 0, \qquad \frac{K \cdot l \cdot \cos\ \alpha}{2} - \frac{F \cdot l \cdot \cos\ \alpha}{2} = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása ($\alpha \neq 90^\circ$ esetben) $K = F = mg/2$.

Ha a fonalat elégetjük, akkor a rúd nem marad egyensúlyban, hanem gyorsuló mozgásba kezd. Mozgását jellemezhetjük a súlypont gyorsulásának vízszintes és függőleges összetevőjével, valamint a súlypont körüli β szöggyorsulással. A rúdra ható erők: az mg súlyerő, a talaj F nyomóereje és S súrlódási erő (2. ábra).



2. ábra

A talaj most nemcsak függőleges nyomóerővel hat a rúdra, mivel az nincs egyensúlyban, hanem vízszintes súrlódási erővel is, és éppen ez az erő hozza létre a rúd vízszintes gyorsulását.

Írjuk fel a mozgásegyenletet a függőleges és a vízszintes komponensekre

$$mg - F = m \cdot a_1, \tag{1}$$

$$S = ma_2. \tag{2}$$

Felírhatjuk még a forgómozgás alapegyenletét (a súlypontra vonatkoztatva), felhasználva, hogy egy homogén rúd tehetetlenségi nyomatéka $ml^2/12$.

$$\frac{F \cdot l \cdot \cos\alpha}{2} - \frac{S \cdot l \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{ml^2}{12}\beta. \tag{3}$$

A test mozgását jellemző a_1, a_2 és β mennyiségek nem függetlenek egymástól, mivel a rúd alsó vége csak vízszintes irányú mozgást végezhet. Ezt az

$$a_1 = \frac{l \cdot \beta}{2} \cos\alpha \tag{4}$$

egyenlet biztosítja.

Az (1)–(4) egyenletekben 5 ismeretlen szerepel (a_1, a_2, β, F, S). A hiányzó ötödik egyenlet felírásánál két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha a rúd talppontja csúszik a talajon, akkor

$$S = \mu F. \tag{5}$$

Ez az egyenlet akkor érvényes, ha a rúd valóban jobbra csúszik, vagyis ha

$$\frac{l}{2}\beta\ \sin\ \alpha \geqq a_2. \tag{6}$$

Az (1)–(5) egyenletrendszer megoldása F és S-re:

$$F = \frac{mg}{1 + 3\cos\alpha(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}, \tag{7}$$

(8) $$S=\frac{mg\mu}{1+3\cos\alpha(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)};$$

a (6) feltétel pedig akkor teljesül, ha

(9) $$\mu\leqq\frac{3\ \mathrm{tg}\ \alpha}{1+4\ \mathrm{tg}^2\ \alpha}.$$

Ha a rúd nem csúszik a talajon, akkor S és F között már nem áll fenn az (5) egyenlet. A hiányzó egyenletet éppen az a feltétel adja, hogy a rúd talppontja nem mozdul el, vagyis

(5') $$\frac{l}{2}\beta\sin\alpha=a_2.$$

Ez a lehetőség akkor valósul meg, amikor a súrlódási együttható elég nagy ahhoz, hogy teljesüljön a

(6') $$S\leqq\mu F$$

egyenlőtlenség. Az (1)–(4) és $(5')$ egyenletrendszer megoldása

(7') $$F=mg\left(1-\frac{3}{4}\cos^2\alpha\right),$$

(8') $$S=\frac{3}{4}mg\sin\alpha\cos\alpha,$$

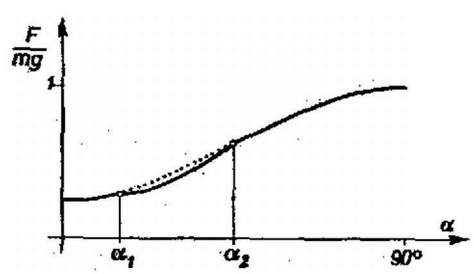
és a megoldás érvényességének $(6')$ feltétele

(9') $$\mu\geqq\frac{3\ \mathrm{tg}\ \alpha}{1+4\ \mathrm{tg}^2\ \alpha}$$

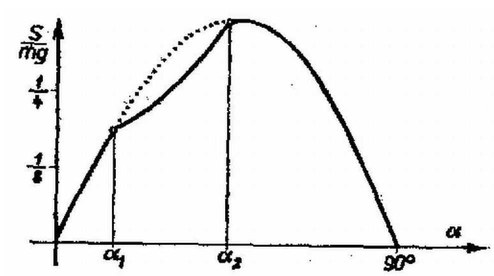
alakban írható.

Ábrázoljuk F és S erőket az indulás α szögének függvényében adott μ súrlódási együttható mellett. Először határozzuk meg azt a kritikus α szöget, melynél a rúd még éppen nem csúszik!

A $\mu_0=\dfrac{3\ \mathrm{tg}\ \alpha}{1+4\ \mathrm{tg}^2\ \alpha}$ egyenletnek α-ra nincs megoldása, ha $\mu_0>3/4$. Ilyenkor mindig $(9')$ érvényes, vagyis a rúd nem csúszik. Ha $\mu_0<3/4$, akkor létezik olyan α_1 és α_2 szög, melyek közé választva az α indítási szöget, a rúd csúszni kezd. Amennyiben $\alpha<\alpha_1$ vagy $\alpha>\alpha_2$, akkor $(9')$ teljesül, és a rúd nem csúszik.



3. ábra



4. ábra

A 3. és 4. ábrán F és S különböző értékeit láthatjuk $\mu_0=3/5$ esetén.

Gács Lajos (Bp., Landler J. Techn., II. o. t.) és
Hennyey Katalin (Bp., Kölcsey F. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján