I. megoldás. A mozgás leírásához szükségünk van a láda ütközés utáni sebességére. Mivel az ütközés pillanatában a rendszerre ható külső erők eredője 0, mindkét esetben érvényes az impulzusmegmaradás törvénye.

a) Feltételezve, hogy a láda ütközés utáni sebességének iránya megegyezik a nekidobott tárgy ütközés előtti sebességének irányával (centrális ütközés), az impulzus és a mechanikai energia megmaradásának törvényéből a láda sebessége ütközés után

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v.$$

Adatainkkal: $v_2 = 4{,}5$ m/s.

b) Felhasználva, hogy a két test ütközés utáni sebessége azonos, az impulzusmegmaradás törvényéből

$$v_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2}v.$$

Adatainkkal: $v_2' = 2{,}25$ m/s.

Ezzel az állandó sebességgel mozog a láda a súrlódásmentes részen.

A súrlódásos részre érve, a ládára ható erők eredője már nem 0. Rá vízszintes síkban, a mozgással ellentétes irányban az S súrlódási erő hat, és Newton II. törvénye szerint

$$-S = ma.$$

Tudjuk továbbá, hogy amíg a láda vízszintes egyenes mentén mozog,

$$S = \mu mg.$$

Így a láda gyorsulása: $a = -\mu g$. (a csak a nehézségi gyorsulástól és a súrlódási tényezőtől függ. Ezt összevetve a sebesség kiszámítására talált összefüggéssel, megállapíthatjuk, hogy a feladat megoldásához nem szükséges a két tömeg nagysága, elég a tömegek arányának ismerete.) Adatainkkal $a = -1{,}96\ \mathrm{m/s}^2$.

A láda sebességének időfüggvénye

a) $v = v_2 + at = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}v - \mu g t = 4{,}5\ \mathrm{m/s} - (1{,}96\ \mathrm{m/s}^2)t$,

b) $v' = v_2' + at = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}v - \mu g t = 2{,}25\ \mathrm{m/s} - (1{,}96\ \mathrm{m/s}^2)t$,

ha az időt a súrlódásos rész elérésétől mérjük. $t_1 = -\dfrac{v_2}{a}$, illetve $t_1' = -\dfrac{v_2'}{a}$ idő elteltével a test megáll, és nem mozog tovább, a súrlódási erő 0 lesz.

Tehát a függvény értelmezési tartománya:

$$a)\qquad 0 < t < \frac{v_2}{-a} = 2{,}3\ \mathrm{s}, \qquad\qquad b)\qquad 0 < t < \frac{v_2'}{-a} = 1{,}15\ \mathrm{s}.$$

Ezzel a mozgást teljesen jellemeztük.

A láda a súrlódásos rész szélétől

$$a)\qquad s = \frac{v_2^2}{-2a} = 5{,}16\ \mathrm{m}, \qquad\qquad b)\qquad s = \frac{v_2'^2}{-2a} = 1{,}25\ \mathrm{m}$$

távolságig jut el.

Amtmann Árpád (Esztergom, I.István Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Az előző megoldásban a ládát tömegpontnak tekintettük. Vizsgáljuk meg, hogyan zajlik le a súrlódás nélküli felülettől a súrlódásos részre való átcsúszás, ha a homogén tömegeloszlású láda hosszúsága l.

Ha a láda első éle a két felület határvonalától x távolságra van (feltéve, hogy a láda súlya egyenletesen oszlik el) a súrlódásos részt és a láda alját x-szel arányos $N = m\mu g \cdot \dfrac{x}{l}$ nagyságú erő nyomja össze. A ládát tehát egy, a mozgás irányával ellentétes irányú

$$S = -N = -\mu\frac{mg}{l}x$$

erő fékezi. Ez az összefüggés hasonló alakú az $F = -kx$ rugóegyenlethez. Ismerve, hogy a rugó hosszát l-lel megváltoztatva, rajta $W = (1/2)kl^2$ munkát kell végezni, a láda mozgási energiája a síkra való teljes rácsúszásig

$$W = \frac{1}{2}\frac{\mu mg}{l}l^2 = \frac{1}{2}l\mu mg\text{-vel}$$

csökken. Tehát amikor a láda eleje a határvonaltól l távolságra van, mozgási energiája

$$W_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}\mu mgl.$$

A továbbiakban a láda „b” úton munkát végez az $S=\mu mg$ fékező erő ellen, egészen addig, amíg meg nem áll:

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}\mu mgl=S\cdot b=\mu mg\cdot b.$$

Ebből a láda elejének a határvonaltól mért legnagyobb távolsága

$$s^*=l+b=\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{\mu g},$$

mindkét esetben $l/2$-veI nagyobb, mint az előbb számított érték.

Mint láthattuk, a feladatot az energiaviszonyok vizsgálatával is meg lehet oldani. (Ha l-et 0-nak vesszük, az előbbi eredményeket kapjuk vissza.)

Balla Éva (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)