Elegendő csak azt az esetet vizsgálnunk, amikor felfelé indítjuk a fonál végén levő testet, mert ha lefelé indítanánk, akkor a másik oldalon az alsó félkör megtétele után ugyanakkora sebességgel indulna felfelé. A felfelé induló testet a fonál körpályára kényszeríti. A körmozgást fenntartó centripetális erő a fonál feszítő erejéből és a súlyerő fonálirányú komponenséből adódik össze. A mozgás során a súlyerő fonálirányú komponense növekszik, a centripetális erő pedig csökken, mivel a súlyerő érintőirányú komponense lassítja a körmozgást. Amint a súlyerő fonálirányú komponense eléri a centripetális erő értékét, a fonál meglazul és egy ferde hajítási feladattal állunk szemben, amelyben a kezdősebesség nagysága ismeretlen. Világos, hogy a fonál nem fog még egyszer megfeszülni, hiszen az eddig növekvő vízszintes sebességkomponens állandó marad, míg a függőleges még erősebben csökken. Ha a kezdősebesség v_0, és a fonál ellazulása pillanatában a sebesség v, a fonálnak a vízszintessel bezárt szöge α, akkor

(1) $$mv^2/l = mg\cdot\sin\alpha,$$

(2) $$mv_0^2/2 = mv^2/2 + mgl\cdot\sin\alpha \text{ (az energiatételből)},$$

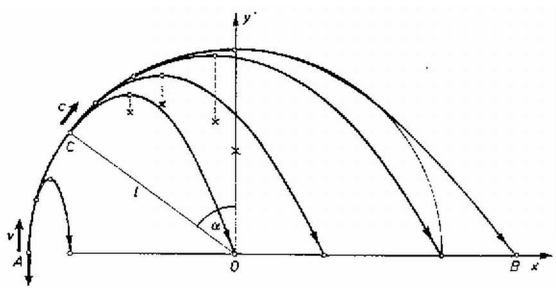
(3) $$l\cdot\cos\alpha = tv\cdot\sin\alpha,$$

(4) $$l\cdot\sin\alpha = gt^2/2 - tv\cdot\cos\alpha.$$

(3)-ból t-t, (1) és (2)-ből v^2-et ill. $\sin\alpha$-t kifejezve és (4)-be beírva azonnal nyerjük a végeredményt: $v_0=\sqrt{\sqrt{3}lg}$. Tehát ekkora sebességgel kell indítanunk a testet, hogy a felfüggesztési ponton haladjon keresztül.

Romsics László (Baja, III. Béla Gimn., III. o. t.)
Pál Jenő (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Érdekes a feladat általánosítása, amikor a fonál végén levő test a vízszintes körátmérő bármely pontjába érkezhet. Határozza meg a test helyzetét az α szög függvényében (l. az ábrát).



Annak a feltétele, hogy a test az a szöghöz tartozó C pontban hagyja el befelé a kört az, hogy C-ben a sebessége $c=\sqrt{gr\ \cos\alpha}$ legyen. Ezzel mint kezdősebességgel ferde hajítást végez. A hajítási pálya függvénye, ha a koordinátarendszert a kör O középpontjába tesszük:

$$y=\frac{2\ \cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\ \cos^3\alpha}\cdot l-\mathrm{tg}^2\alpha\cdot x-\frac{1}{2l\ \cos^3\alpha}\cdot x^2.$$

Ennek vizsgálata a következő eredményekre vezet. A vízszintes átmérőt ebben a pontban éri el a test:

$$x=l\left[-\sin^3\alpha+\sqrt{\sin^6\alpha+2\ \cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\right].$$

A hajítási pálya csúcspontjának magassága, $y=l\ \cos\alpha\left(3-\cos^2\alpha\right)/2$, fókuszának magassága $y=l\cos\alpha(3-2\cos^2\alpha)/2$ és e két pont x-koordinátája $x=-l\ \sin^3\alpha$.

Ábránk α szög 90°, 75°, 54,7°, 45°, 30° és 0°-os értékei mellett mutatja a pályákat. Az eredeti feladathoz az $\alpha=54{,}7°$ tartozik. $\alpha=45°$-nál van a fókusz a legmagasabban. A vízszintes átmérő másik, B végpontját $\alpha=30°$-os indításnál éri el a test. $30° > \alpha$ esetén a parabola pálya metszi az l sugarú kört, a metszéspontban a kötél újra megfeszül, és a test „visszapattan”.

A pályák akkor jönnek létre, ha az elhagyás C pontjában a sebesség $c=\sqrt{gr\ \cos\alpha}$. Ha azt akarjuk, hogy A-ból történő függőleges indításnál C-ben ez legyen a sebesség, akkor A-ban függőlegesen $v=\sqrt{3\ gr\ \cos\alpha}$ sebességgel kell a testet felfelé elindítani.

(Vermes Miklós)