I. megoldás. Az r_2 sugarú „2" fogaskerék mozgása két forgó mozgásból tevődik össze. Egyrészt ω szögsebességgel forog az „1" fogaskerék középpontja körül, másrészt pedig úgy forog a saját tengelye körül ω_2 szögsebességgel, hogy csúszásmentesen gördüljön végig az „1" keréken. Az ω_2-t legkönnyebben a középpontokat összekötő rúdra ülve, az ω szögsebességgel forgó koordinátarendszerben határozhatjuk meg. Ebben a rendszerben az „1" fogaskerék szögsebessége $\omega_1 - \omega$ (a szögsebességek mindig előjelesen értendők), ez olyan sebességgel forgatja a „2"-t, hogy egyenlő idők alatt egyenlő ívdarabok gördüljenek el egymáson, vagyis

$$r_1(\omega_1 - \omega)| \cdot t = -r_2\omega_2 t,$$

ebből

$$\omega_2 = -\frac{r_1}{r_2}(\omega_1 - \omega).$$

A pillanatnyi forgástengely azon a ponton fog áthaladni, amely pontnak – az O_1 körüli ω és O_2 körüli ω_2 szögsebességű forgás eredőjeként létrejövő – sebessége nulla. Ez a pont csak az O_1O_2 egyenesen lehet, mert csak itt párhuzamos az egyes forgásokból adódó sebességek iránya. Tegyük fel, hogy a keresett pont az O_1-től x távolságra, helyezkedik el. Ekkor az O_1 körüli forgásból származó sebessége:

$$v_1 = x \cdot \omega,$$

az O_2 körüli forgásból származó sebessége pedig:

$$v_2 = \big[x - (r_1 + r_2)\big] \cdot \omega_2.$$

Az x pozitív, ha az O_1-től az O_2 felé esik. Ezek eredője:

$$v_1 + v_2 = x(\omega + \omega_2) - (r_1 + r_2)\omega_2,$$

akkor lesz nulla, ha

$$x = (r_1 + r_2)\frac{r_1(\omega - \omega_1)}{r_2\omega + r_1(\omega - \omega_1)}.$$

Szöllősy Péter (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)

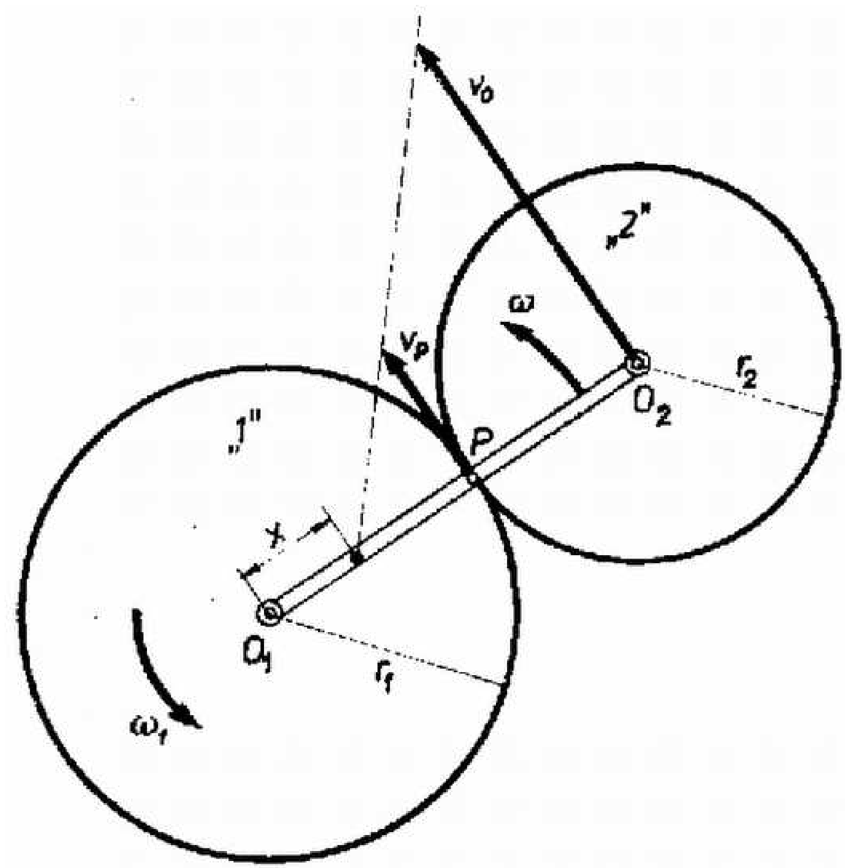
II. megoldás. Bármely időpontban a „2" kerék középpontjának a sebessége:

$$v_0 = (r_1 + r_2)\omega.$$

Mivel a fogak nem csúszhatnak el egymáson, ezért az érintkezési pontok sebessége egyenlő:

$$v_p = r_1\omega_1.$$

Ezek ismeretében már meghatározható a pillanatnyi forgástengely. Az nyilvánvaló, hogy ez csak a két középpontot összekötő egyenesen lehet, mivel mindkét említett sebesség merőleges erre, mégpedig olyan pontban, amely körül az adott pillanatban a „2" kerék mozgása egyetlen forgásként fogható fel, azaz minden pontjának a sebessége úgy irható fel, mint az ettől a ponttól való távolság és az erre a pontra vonatkozó pillanatnyi Ω szögsebesség szorzata (1. ábra).



1. ábra

Jelöljük ennek a pontnak az O_1-től való távolságát x-szel. Ekkor az O_2 sebessége így írható fel:

$$v_0 = (r_1 + r_2 - x)\Omega = (r_1 + r_2)\omega,$$

a P ponté pedig:

$$v_p = (r_1 - x)\Omega = r_1\omega_1.$$

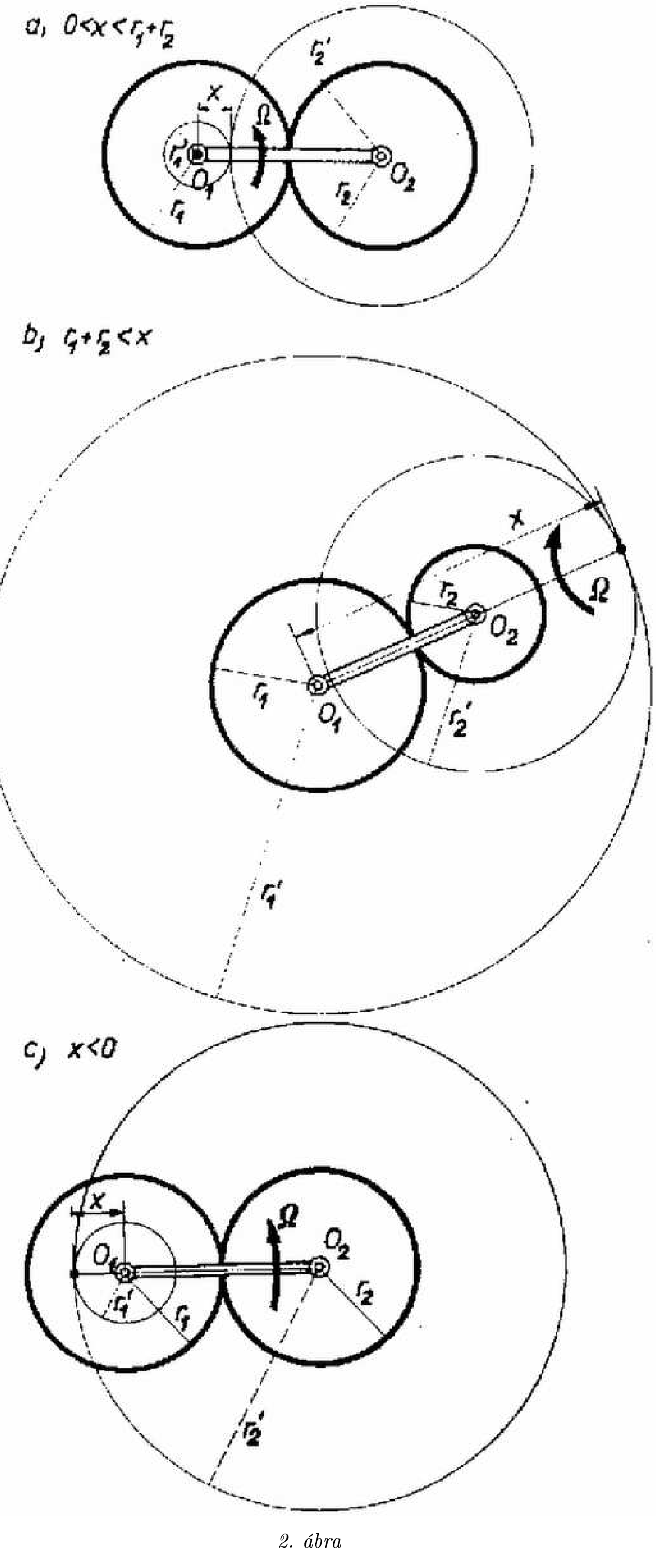
Ezt a két egyenletet megoldva x-re és Ω-ra azt kapjuk, hogy

$$\Omega = \omega + \frac{r_1}{r_2}(\omega - \omega_1),$$
$$x = (r_1 + r_2)\frac{r_1(\omega - \omega_1)}{r_2\omega + r_1(\omega - \omega_1)}.$$

Szalai Gábor (Bp., Piarista Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A „2" fogaskerék mozgását mindig származtathatjuk az $\omega_1 = 0$ esetből. Ha ugyanis az „1" fogaskerék helyett egy álló $r_1' = x$ sugarú fogaskereket veszünk, az O_2 tengelyre pedig egy $r_2' = r_1 + r_2 - x$ sugarú fogaskereket erősítünk a „2" mellé, akkor a középpontokat összekötő rudat ω szögsebességgel forgatva az r_2' sugarú kerék gördülni fog az r_1'-n, a vele együtt forgó „2" kerék pedig ugyanúgy fog mozogni, mint eredetileg.

Ha $x > r_1 + r_2$ akkor az r_2 sugarú kör az r_1' sugarú, kör belsejében fog gördülni (2. ábra).



a) 0<x<r1+r2
r2'
x
Ω
r1'
O1
O2
r1
r2
b) r1+r2<x
x
Ω
r2
O2
r1
O1
r2'
r1'
c) x<0
x
Ω
O1
O2
r1'
r1
r2
r2'

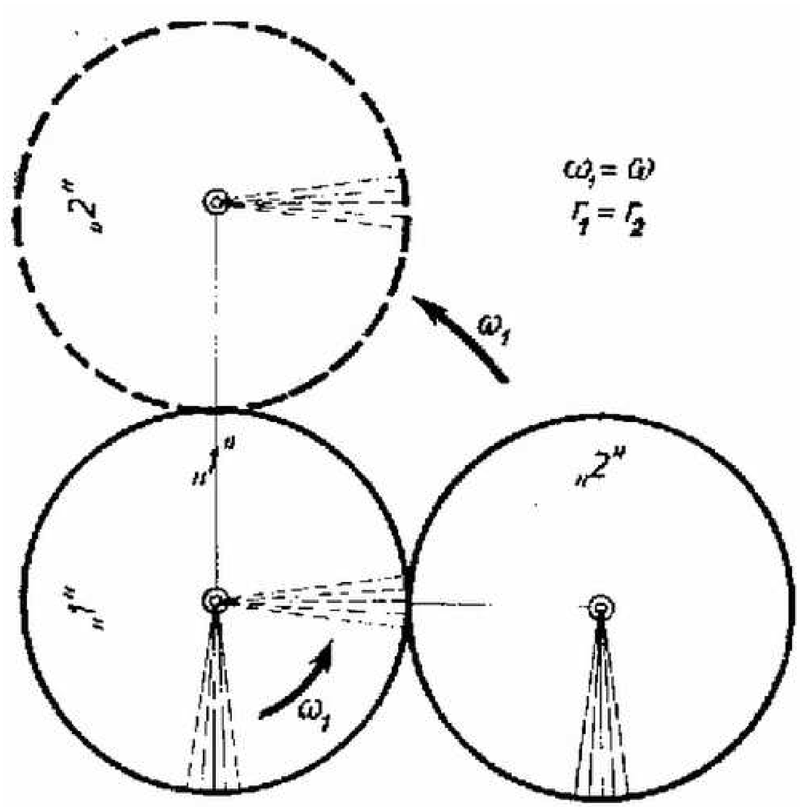
2. ábra

Ha $x > 0$, akkor pedig az r_1' sugarú kör lesz az r_2' sugarú kör belsejében.

Bajmóczy Ervin (Bp.Fazekas M. Gimn., II. o. t.)

2. A megoldások során csak állapítottuk meg, hogy ha van pillanatnyi forgástengely, akkor az csak az összekötő rúdon az O_1-tól x távolságra lehet. Hogy ez valóban forgástengely, arról mindenki könnyen meggyőződhet azzal, ha felírja a „2" kerék egy tetszőleges pontjának a sebességét, a mozgást egyetlen forgásnak, ill. két forgás eredőjének tekintve.

3. Sokan azt írták, „a „2" kerék mozgása az ω forgásból és egy $v_0 = (r_1 + r_2)\omega$ sebességű haladó mozgásból tevődik össze." Ez óriási tévedés. Ugyanazt a hibát követték el, mint az a megoldó, aki azt írta, hogy „ha $\omega_1 = \omega$, akkor az r_2 súgarú kerék nem forog. Elfeledkeztek arról, hogy habár egy testet egy rajta kívül haladó tengely körül forgatunk meg ω szögsebességgel, azért annak *bármely* pontját választva, az egésznek a mozgása úgy fogható fel, mint a körül a bizonyos pont körüli *ugyanazzal az* ω-val való forgás (és persze ehhez járulhat még egy haladó mozgás). Jól látható ez $\omega_1 = \omega$ esettén a 3. ábrán.



3. ábra

A további félreértések elkerülése érdekében összefoglaljuk, milyen is lehet egy merev test általános mozgása. Csak rövid tényközlésre szorítkozhatunk, a részletesebb bizonyítást lásd Budó Ágoston *Mechanika* című könyvében. Először is azt kell leszögezni, hogy a szögsebesség *vektormennyiség*, amelynek az iránya megadja a forgástengely irányát, az abszolút értéke pedig a szögsebesség nagyságát. Az általános esetet egy példán fogjuk szemléltetni. Vegyünk egy merev testet, forgassuk ezt meg a P_1 pontja körül $\vec{\omega}_1$ szögsebességgel, és tegyük fel egy $\vec{v}_1$ sebességgel haladó autóra. Haladjon ez az autó egy hatalmas óceánjárón, amely éppen $\vec{\omega}_2$ szögsebességgel kanyarodik, miközben a $\vec{v}_2$ sebességű Golf-áramban halad. Mindezen mozgásokhoz hozzáadódik még az, hogy a Föld $\vec{\omega}_3$ szögsebességgel forog a saját tengelye körül, és $\vec{\omega}_4$ szögsebességgel kering a Nap körül, végül az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a Nap $\vec{v}_3$ sebességgel mozog az állócsillagokhoz képest (valójában ez is bizonyos szögsebességgel kering a Tejút centruma körül). Feltehetjük a kérdést, hogy milyen lesz a merev testünk mozgása az állócsillagokhoz viszonyítva. A fizika, vagy inkább a geometria törvényei szerint a testünknek ez a bonyolult mozgása egyetlen forgó és egy haladó mozgás összegére vezethető vissza. Ez úgy értendő, hogy egy *tetszőleges* pontot felvéve a testen a *pillanatnyi* mozgás úgy írható fel, hogy a haladó mozgás sebessége egyenlő ennek a kiválasztott pontnak a sebességével, és a test e pont körüli forgásának a szögsebessége pedig egyenlő az *összes* forgó mozgások szögsebességeinek vektori összegével, azaz a pillanatnyi szögsebesség a jelen esetben:

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_4$$

Jól jegyezzük meg tehát, hogy bármelyik pontját is választjuk ki, a test e kiválasztott pont körül mindig ugyanakkora $\vec{\Omega}$-val fog forogni, a haladó mozgás pillanatnyi sebessége azonban már függ ennek a referenciapontnak a megválasztásától, ezért nem is adunk meg itt rá semmi képletet.

Láttuk, ha önkényesen választjuk meg a referenciapontot, akkor a mozgás általában két részből tevődik össze: haladó és forgó mozgásból. De ha lemondunk erről az önkényről, és egy olyan pontot; választunk referenciapontnak, amelynek a sebessége nulla – $\Omega \neq 0$ esetén ezt mindig megtehetjük, bár lehet, hogy az ilyen pontok a testen kívül helyezkednek el, de képzeletben a testet meghosszabbíthatjuk akár addig is –, akkor csak a forgó mozgás marad.

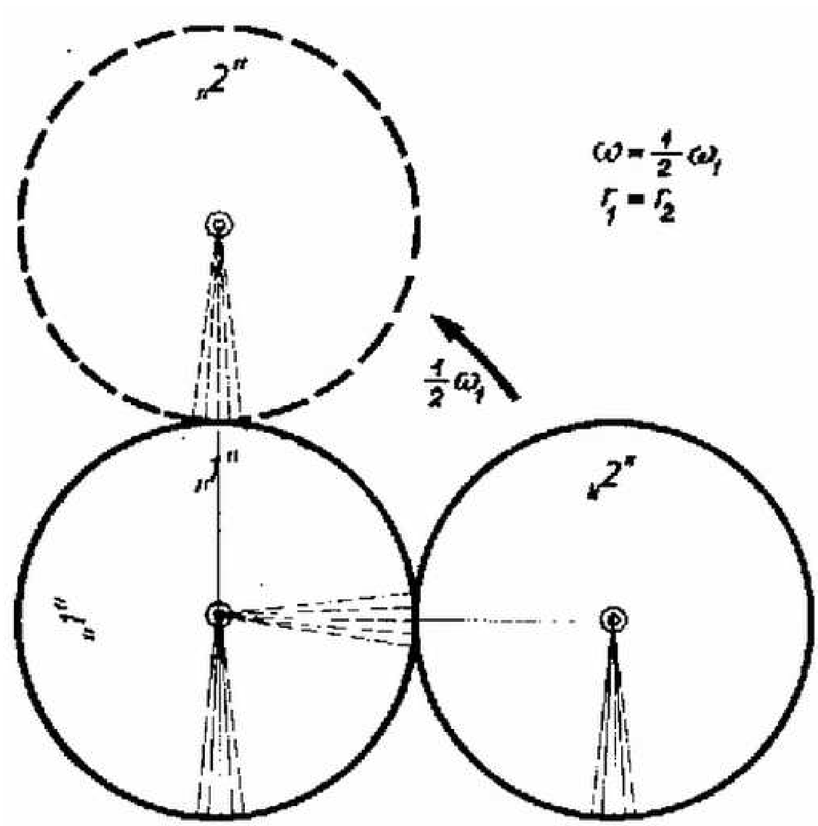
Külön figyelmet érdemel az $\Omega = 0$ eset. Ezért vizsgáljuk meg ezt a fogaskerekeink esetén is. A második megoldásban láttuk, hogy a „2” kerék eredő szögsebessége:

$$\Omega = \omega + \frac{r_1}{r_2}(\omega - \omega_1).$$

Vagyis ez akkor fog *csak* haladó mozgást végezni, ha

$$\omega = \omega_1 \frac{r_1}{r_1 + r_2}.$$

A 4. ábrán látható $r_1 = r_2$ esetén, amikor $\omega = \frac{1}{2}\omega_1$, mit is jelent ez a haladó mozgás.



4. ábra

Vagyis nem $\omega_1 = \omega$ esetén, hanem ekkor hiányzik a forgó mozgás, és bár nincs forgás, a „2” kerék mégis körbe megy.