I. megoldás. A korong és a hozzá rögzített rúd alkotta merev test a kezdeti labilis állapotból kibillentve a kisebb helyzeti energiájú stabilis állapotba kerül, a rúd oldalra billen. Mivel a csúszó súrlódás nagy, sima gördülés jön létre. A pillanatnyi forgástengely a korong és a sík érintkezési pontja P, így a test mozgási energiája (ami a P körüli forgás forgási energiája) a rúd földbe ütődésekor:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}(I_k + I_r)\omega^2,$$

ahol I_k ill. I_r a korong, ill. rúd P-re vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka a véghelyzetben. Mivel a kibillentési munka elhanyagolhatóan kicsi, ez a mozgási energia egyenlő a helyzeti energia csökkenésével:

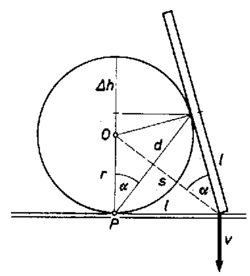
$$\frac{1}{2}(I_k + I_r)\omega^2 = mg\Delta h,$$

ahol m a rúd tömege.

Innen

$$\omega = \sqrt{\frac{2mg\Delta h}{I_k + I_r}}.$$

és a rúd végének sebessége a becsapódáskor $v = l\omega$, s függőlegesen lefelé mutat (forgó mozgásnál a sebesség a forgástengelytől húzott sugárra merőleges).



1. ábra

Steiner tételének felhasználásával, ha M a korong tömege:

$$I_k = \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2, \quad I_r = \frac{1}{12}(2l)^2 m + md^2,$$

továbbá az ábráról hasonló háromszögekből

$$\frac{d/2}{r} = \frac{l}{s},$$

így $s = \sqrt{r^2 + l^2}$ alapján

$d = \dfrac{2rl}{\sqrt{r^2+l^2}}$; $\Delta h = 2r - d\cos\alpha = 2r - \dfrac{2rl}{\sqrt{r^2+l^2}} \cdot \dfrac{l}{\sqrt{r^2+l^2}} = 2r\left(1 - \dfrac{l^2}{r^2+l^2}\right)$, s ezekkel

$$v = 2l\sqrt{\frac{gr\left(1 - \frac{l^2}{r^2+l^2}\right)}{\frac{3M}{2m}r^2 + l^2\left(\frac{1}{3} + \frac{4r^2}{r^2+l^2}\right)}}.$$

Numerikus adataink esetén $v \approx 4{,}0$ m/s.

Cserháti János (Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimn., III. o. t.

II. megoldás. Felbonthatjuk a lebillenés utáni mozgást a tömegközéppont egyenesvonalú haladó mozgására és a korong O középpontja körüli forgásra. Ekkor az energia megmaradást kifejező egyenlet így alakul:

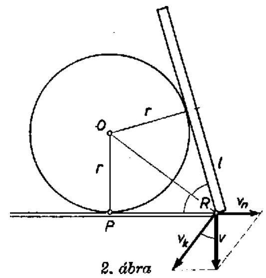
$$mg\Delta h = \frac{1}{2}(I_k + I_r)\omega^2 + \frac{1}{2}(m+M)v_h^2,$$

ahol I_k és I_r most az O-ra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékok:

$$I_k = \frac{1}{2}Mr^2, \quad I_r = \frac{1}{12}m(2l)^2 + mr^2.$$

Ekkor a sima legördülés miatt $\omega = \dfrac{v_h}{r}$.

Az I. megoldáshoz hasonlóan számíthatjuk Δh-t, s ezzel az energiaegyenletből megkapjuk az ω-t.



2. ábra

A rúd végének a haladó, ill. az O körüli forgó mozgásból származó sebesség összetevői a becsapódáskor:

$$v_k = OR \cdot \omega = \sqrt{r^2 + l^2}\omega;$$

v_k vízszintes, v_h pedig $\overline{OR}$-re merőleges. Könnyen belátható hasonlóságból, hogy a két komponens eredője függőlegesen lefelé mutat, s nagysága:

$$v = \sqrt{v_k^2 - v_u^2} = l\omega.$$

Gyimesi Ferenc (Győr, Révai M. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. I. Az eredményül kapott képletből látható, hogy v csak a korong és rúd tömegének arányától függ.

2. Több versenyző rosszul alkalmazta a Steiner tételt, illetve nem volt tisztában azzal, hogy a test minden alkotórészének tehetetlenségi nyomatékát ugyanarra a forgástengelyre kell vonatkoztatni.