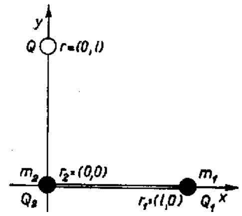
I. megoldás. A feladatban négy objektum szerepel: a Q_1 töltésű m_1 tömeg, a Q_2 töltésű m_2 tömeg, a rögzített Q töltés és a súlytalan merev szigetelő rúd. A megoldást a Newton-axiómák *következetes* alkalmazásával kaphatjuk meg. (A hangsúly itt a következetességen, amely sajnos a megoldók többségénél hiányzott.) Vegyük fel az 1.ábrán látható koordináta-rendszert. A Q_2 töltés az origóba, a Q_1 az x tengelyre, a Q pedig az y tengelyre essék.



1. ábra

Newton II. axiómája azt mondja, hogy az egyes testek tömegének és gyorsulásának szorzata egyenlő a ráható *összes* erők eredőjével. Ebben talán a leglényegesebb az összes szó, legalábbis erről feledkeztek meg a legtöbben. Vizsgáljuk meg tehát *külön-külön* az egyes objektumokra ható összes erőt, majd ezután határozzuk meg ezek eredőjét.

Az $\mathrm{r}_2 = (0,0)$ pontbeli Q_2 töltésre ható erők – $2a$ ábra – a következők. (A továbbiakban egyszerűség kedvéért figyelmen kívül hagyjuk a tömegek között fellépő, az elektromos erőkhöz képest elenyésző nagyságú gravitációs erőket, nem ez az erő hiányzott az „összes” erők közül. *A 816. feladat megoldásánál a vektorok derékszögű komponenseit zárójelben tüntetjük fel.)*

1. Az $\mathrm{r} = (0,l)$-beli Q töltésből származó Coulomb-erő (lásd a megjegyzést):

$$\mathrm{F}_1^{(2)} = k\frac{QQ_2}{|\mathrm{r}_2-\mathrm{r}|^2}\cdot\frac{\mathrm{r}_2-\mathrm{r}}{|\mathrm{r}_2-\mathrm{r}|} = \left(0, -k\frac{QQ_2}{l^2}\right)$$

2. Az $\mathrm{r}_1 = (l,0)$-beli Q_1 töltésből pedig

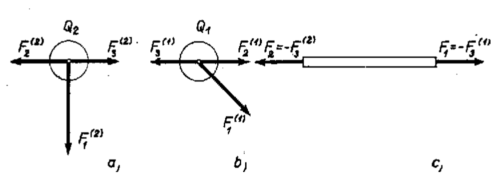
$$\mathrm{F}_2^{(2)} = k\frac{Q_1Q_2}{|\mathrm{r}_2-\mathrm{r}|^2}\cdot\frac{\mathrm{r}_2-\mathrm{r}_1}{|\mathrm{r}_2-\mathrm{r}_1|} = \left(-k\frac{Q_1Q_2}{l^2}, 0\right)$$

Coulomb erő hat.

3. A Q_1-t és a Q_2-t összekötő rúd a közvetlen mechanikai csatlakozás révén (ez az, amiről oly sokan megfeledkeztek)

$$\mathrm{F}_3^{(2)} = (K_2, 0)$$

erővel hat a Q_2 töltésre, amely a rúd vékony és merev volta miatt csak x irányú lehet. Azt azonban még egyelőre nem tudjuk, hogy ez a K_2 mekkora.



2. ábra

Hasonló módon a Q_1 töltésre ható erők ($2b$ ábra):

1. A Coulomb erő a Q töltésből

$$\mathrm{F}_1^{(1)} = k\frac{QQ_1}{|\mathrm{r}_1-\mathrm{r}|^2}\cdot\frac{\mathrm{r}_1-\mathrm{r}}{|\mathrm{r}_1-\mathrm{r}|} = k\frac{QQ_1}{2l^2}\cdot\left(\frac{l}{\sqrt{2}l}, \frac{-1}{\sqrt{2}l}\right) = \left(k\frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2}, -k\frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2}\right).$$

2. A Q_2 -ből származó Coulomb erő:

$$\mathrm{F}_2^{(1)} = -\mathrm{F}_2^{(2)} = \left(+k\frac{Q_1Q_2}{l^2}, 0\right).$$

3. Az összekötő rúd nyilvánvalóan erre is csak x irányú erővel hat:

$$\mathrm{F}_3^{(1)} = (K_1, 0).$$

Mivel a Q töltés rögzítve van, így akármekkora erő is hat reá, nem jöhet létre gyorsulás („végtelen” a tömege), ezért nem érdekesek a ráható erők. Annál érdekesebbek viszont az összekötő rúdra ható erők ($2c$ ábra). Mivel a rúd $\mathrm{F}_3^{(1)}$

erővel hat a Q_1 töltésre, ezért a rúdra a III. axióma értelmében $\mathrm{F}_1 = -\mathrm{F}_3^{(1)} = (-K_1, 0)$ erő hat, ugyanígy hat persze a rúdra az $\mathrm{F}_3^{(2)}$ erő ellenereje is, az $\mathrm{F}_2 = -\mathrm{F}_3^{(2)} = (-K_2, 0)$ erő. Most alkalmazzuk Newton II. axiómáját először az összekötő rúdra. Mivel ennek tömege nulla, ezért az erők összege:

$$m\mathrm{a} = \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 = 0,$$

amely komponensekre kiírva azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} -K_1 - K_2 &= 0, \\ 0 + 0 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Vagyis $K_1 = -K_2$ amely felére csökkenti ugyan az ismeretlenek számát, de még mindig ismeretlen marad a rúdban ébredő erő. Ennek az az oka, hogy ezt a K_1 erőt, az ún. kényszererőt – amely azért hat a két tömeg között, mert azok mozgása és így a gyorsulása nem lehet tetszőleges, ugyanis a rúd merevsége miatt a két tömeg távolsága nem változhat – meghatározó feltételt még eddig nem vettük figyelembe. Ez a *geometriai* feltétel matematikailag azt jelenti, hogy

$$|\mathrm{r}_1(t) - \mathrm{r}_2(t)|^2 = l^2.$$

Ezt az összefüggést felhasználva próbáljunk valamilyen kapcsolatot keresni a gyorsulások között. Ha az m_1, ill. az m_2 tömeg gyorsulása a kezdetben a_1, ill. a_2, és a kezdősebességük nulla, akkor egy kis Δt idő alatt az elmozdulásuk

$$\left(\frac{a_{1\mathrm{x}}}{2}\Delta t^2,\ \frac{a_{1\mathrm{y}}}{2}\ \Delta t^2\right) = \Delta\mathrm{r}_1, \quad \text{illetve} \quad \left(\frac{a_{2\mathrm{x}}}{2}\Delta t^2,\ \frac{a_{2\mathrm{y}}}{2}\ \Delta t^2\right) = \Delta\mathrm{r}_2, \quad \text{vagyis}$$

$$\mathrm{r}_1(t = \Delta t) = \mathrm{r}_1(0) + \Delta\mathrm{r}_1 = \left(1 + \frac{a_{1\mathrm{x}}}{2}\ \Delta t^2, + \frac{a_{1\mathrm{y}}}{2}\ \Delta t^2\right),$$

$$\mathrm{r}_2(t = \Delta t) = \mathrm{r}_2(0) + \Delta\mathrm{r}_2 = \left(\frac{a_{2\mathrm{x}}}{2}\ \Delta t^2, + \frac{a_{2\mathrm{y}}}{2}\ \Delta t^2\right),$$

Ezt behelyettesítve a geometriai feltételbe:

$$l^2 = \left(l + \frac{a_{1\mathrm{x}}}{2}\Delta t^2 - \frac{a_{2\mathrm{x}}}{2}\Delta t^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a_{1\mathrm{y}}\Delta t^2 - \frac{1}{2}a_{2\mathrm{y}}\Delta t^2\right)^2$$

Ebből

$$-l(a_{1\mathrm{x}} - a_{2\mathrm{y}})\Delta t^2 = \frac{1}{4}\left[(a_{1\mathrm{x}} - a_{2\mathrm{x}})^2 + (a_{1\mathrm{y}} - a_{2\mathrm{y}})^2\right]\Delta t^4.$$

Δt^2-tel egyszerűsítve:

$$-l(a_{1\mathrm{x}} - a_{2\mathrm{x}}) = \frac{1}{4}\left[(a_{1\mathrm{x}} - a_{2\mathrm{x}})^2 + (a_{1\mathrm{y}} - a_{2\mathrm{y}})^2\right]\Delta t^2.$$

Ha Δt nagyon kicsi, akkor a jobb oldalon gyakorlatilag nulla áll, ezért ebből az következik, hogy

$$a_{1\mathrm{x}} = a_{2\mathrm{x}}. \tag{2}$$

Nem szabad azonban elfeledkezni arról, hogy ez *csak a kezdőpillanatra* igaz! De ez számunkra éppen elég.

Most írjuk fel az m_1 és az m_2 tömegekre a II. axiómát:

$$m_1\mathrm{a}_1 = \mathrm{F}_1^{(1)} + \mathrm{F}_2^{(1)} + \mathrm{F}_3^{(1)} \qquad \text{és} \qquad m_2\mathrm{a}_2 = \mathrm{F}_1^{(2)} + \mathrm{F}_2^{(2)} + \mathrm{F}_3^{(2)}.$$

Az erőket behelyettesítve és az egyenleteket komponensenként kiírva:

$$m_1 a_{1\mathrm{x}} = k\frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2} + k\frac{Q_1Q_2}{l^2} + K_1, \tag{3}$$

$$m_1 a_{1\mathrm{y}} = -k\frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2} + 0 + 0, \tag{4}$$

$$m_2 a_{2\mathrm{x}} = 0 - k\frac{Q_1Q_2}{l^2} + (-K_1) = m_2 a_{1\mathrm{x}}, \tag{5}$$

$$m_2 a_{2\mathrm{y}} = -k\frac{QQ_2}{l^2} + 0 + 0. \tag{6}$$

Az (5) egyenlet felírásánál felhasználtuk az (1) és a (2) egyenleteket. Ebben a négy egyenletben négy ismeretlen van: $a_{1\mathrm{x}}$, $a_{1\mathrm{y}}$, $a_{2\mathrm{y}}$ és K_1. A (3) m_2-szeresét és az (5) m_1-szeresét véve egyenletet kapunk K_1-re:

$$m_2 k\frac{Q_1}{l^2}\left(\frac{Q}{\sqrt{8}} + Q_2\right) + m_2 K_1 = -m_1 k\frac{Q_1Q_2}{l^2} - m_1 K_1.$$

Ebből:

$$K_1 = -k\frac{Q_1}{l^2}\left[\frac{Q}{\sqrt{8}}\,\frac{m_2}{m_1+m_2} + Q_2\right].$$

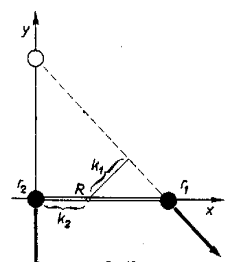
Ekkora erő hat tehát a rúdban. Ezt visszahelyettesítve sorra kifejezhetjük az egyes gyorsulásokat is:

$$a_{1\mathrm{x}} = \frac{k}{m_1+m_2}\,\frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2}, \qquad a_{1\mathrm{y}} = -\frac{k}{m_1}\,\frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2},$$
$$a_{2\mathrm{x}} = \frac{k}{m_1+m_2}\,\frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2}, \qquad a_{2\mathrm{y}} = \frac{k}{m_2}\,\frac{QQ_2}{\sqrt{8}l^2},$$

Maróti Péter (Szeged, Ságvári E. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Csak az tudja igazán értékelni a következő megoldást, aki végigolvasta az előző, közvetlenül a Newton-axiómákon alapuló megoldást. Bár végső soron ez az egyszerű megoldás is ezeken alapul, csak éppen a feladathoz jobban illő alakjukat használja fel. A Newton-axiómák egyik közvetlen következménye a tömegközéppont mozgásának tétele, amely szerint egy pontrendszer súlypontja úgy mozog, mintha az egész tömeg abba lenne koncentrálva, és arra hatna az összes *külső* erő. Egyrészt ezt fogjuk felhasználni, másrészt pedig azt, hogy egy merev test szöggyorsulása egyenlő a forgatónyomaték és a tehetetlenségi nyomaték hányadosával. (Ez az egyenlet azonos Newton II. axiómájával, csak éppen azt ügyes, a probléma lényegét – a merevséget– jól megragadó paraméterekkel írja fel. Az egyes tömegeket a tehetetlenségi nyomatékba, az egyes erőket az eredő forgatónyomatékba, a sok-sok gyorsulást pedig a szöggyorsulásba sűríti. Így elkerülhetővé válik a kínos geometriai feltételek állandó figyelembe vétele.)

A tömegek gyorsulása két részből tevődik össze: a súlypont gyorsulása plusz. a súlypont körüli szöggyorsulásból eredő gyorsulás. Módszerünk előnye, hogy ez a kettő egymástól függetlenül meghatározható.



3. ábra

Jelen esetben a pontrendszert a rúd két végén levő tömegek alkotják. A tömegközéppont koordinátája (3. ábra):

$$\mathrm{R} = \frac{m_1\mathrm{r}_1 + m_2\mathrm{r}_2}{m_1+m_2}.$$

Az ebbe képzelt össztömeg:

$$M = m_1 + m_2.$$

A külső erők csak a Q-ból származó Coulomb-erők (az előző jelöléseket alkalmazva):

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_1^{(1)} + \mathrm{F}_1^{(2)} = \left(k\frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2},\ -k\frac{Q}{l^2}\left(\frac{Q_1}{\sqrt{8}} + Q_2\right)\right).$$

Tehát a tömegközéppont gyorsulása:

$$a_{\mathrm{x}} = \frac{F_{\mathrm{x}}}{M} = \frac{k}{m_1+m_2}\cdot\frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2}, \qquad a_{\mathrm{y}} = \frac{F_{\mathrm{y}}}{M} = -\frac{k}{m_1+m_2}\cdot\frac{Q}{l^2}\left(\frac{Q}{\sqrt{8}} + Q_2\right).$$

A tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

$$I = m_1(\mathrm{r}_1 - \mathrm{R})^2 + m_2(\mathrm{r}_2 - \mathrm{R})^2 = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}l^2.$$

Az egyes külső erők erőkarja (lásd a 3. ábrát):

$$k_1 = \sqrt{2}|\mathrm{r}_1 - \mathrm{R}| \quad \text{és} \quad k_2 = |\mathrm{r}_2 - \mathrm{R}|.$$

Így az eredő forgatónyomaték:

$$M = -k_1|\mathrm{F}_1^{(1)}| + k_2|\mathrm{F}_1^{(2)}| = -\frac{m_2}{m_1+m_2}l\cdot k\frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2} + \frac{m_1}{m_1+m_2}l\cdot k\frac{QQ_2}{l^2}.$$

Ebből a szöggyorsulás:

$$\beta = \frac{M}{I} = k\frac{Q}{l^2}\left[-\frac{1}{m_1}\cdot\frac{Q_1}{\sqrt{8}l} + \frac{1}{m_2}\cdot\frac{Q_2}{l}\right].$$

A tömegeknek a forgásból származó gyorsulása kezdetben csak y irányú, mert a súlypont körül történik a forgás. Ezért az x-irányú gyorsulásuk egyenlő, nagysága pedig megegyezik a tömegközéppont x-irányú gyorsulásával, tehát

$$a_{1\mathrm{x}} = a_{2\mathrm{x}} = \frac{k}{m_1+m_2}\,\frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2}.$$

Az m_1 tömeg forgásból származó y-irányú gyorsulása:

$$a_{1\mathrm{y}}^{\mathrm{forg}} = |\mathrm{r}_1 - \mathrm{R}|\beta = \frac{k}{m_1+m_2}\,\frac{Q}{l^2}\left[-\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{Q_1}{\sqrt{8}} + Q_2\right],$$

az m_2 tömegé pedig

$$a_{2\mathrm{y}}^{\mathrm{forg}} = -|\mathrm{r}_2 - \mathrm{R}|\beta = \frac{k}{m_1+m_2}\,\frac{Q}{l^2}\left[-\frac{m_1}{m_2}Q_2 + \frac{Q_1}{\sqrt{8}}\right].$$

A haladó és forgó mozgás y-irányú eredője:

$$a_{1\mathrm{y}} = a_{\mathrm{y}} + a_{1\mathrm{y}}^{\mathrm{forg}} = -\frac{k}{m_1}\cdot\frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2},$$

$$a_{2\mathrm{y}} = a_{\mathrm{y}} + a_{2\mathrm{y}}^{\mathrm{forg}} = -\frac{k}{m_2}\cdot\frac{QQ_2}{l^2}.$$

Ennek a megoldásnak előnye és ugyanakkor hátránya, hogy nem jelenik meg benne a rúdban ébredő erő. Persze a gyorsulások ismeretében könnyen meghatározhatjuk ezt is. Ez azonban az előző megoldáshoz képest nem jelentene semmi újat, hiszen újra csak a (3) vagy az (5) egyenletből kellene K_1-et kifejezni.

Horváthy Péter (Budapest., Fazekas M. Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. Az x-irányú gyorsulás egyszerűbben is meghatározható, ha abból indulunk ki, hogy az egész rúd x-irányú elmozdulása csak a Q és a Q_1 közötti Coulomb-erőnek a rúd irányába eső komponensének a hatására következik be. Vagyis

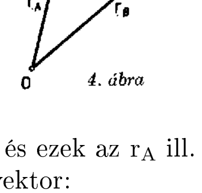
$$a_{1\mathrm{x}} = a_{2\mathrm{x}} = k\frac{QQ_1}{2l^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{m_1+m_2}.$$

A rúdban ébredő erőnek eleve csak x-komponense lehet, ez két részből tevődik össze: a Q_1 és a Q_2 közötti Coulomb-erőt ellensúlyozó erő, és az m_2 tömeg $a_{2\mathrm{x}}$ gyorsulását létrehozó $m_2a_{2\mathrm{x}}$ erő. Tehát a rúdban ébredő erő:

$$K = k\frac{Q_1Q_2}{l^2} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot k\frac{QQ_1}{2l^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Walthier Tamás (Bp., Piarista Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Foglalkozzunk egy kicsit részletesebben a Coulomb-törvénnyel, ill. a hozzá nagyon hasonló Newton-féle gravitációs törvénnyel. Általában csak azt szokták mondani, hogy a két tömeg (töltés) között fellépő erő egyenlő a két tömeg (töltés) szorzatának és a köztük levő távolság négyzetének a hányadosával, amelyet meg kell szorozni egy megfelelő állandóval. (Az állandó elsősorban az egységek megválasztásával van kapcsolatban.) Ez azonban az erőnek csak a nagysága. Az erő viszont vektor mennyiség, ezért meg kell adni az *irányát* is. Szóban ezt úgy szokták elintézni, hogy az erő centrális, azaz a két tömeget összekötő egyenes mentén hat, előjele pedig olyan, hogy a két tömeg vonzza egymást, két töltés esetén az egyneműek taszítják, a különneműek vonzzák egymást. Mi azonban egy általános képletet szeretnénk, amelyben nem kell külön-külön megvizsgálni az ilyen speciális eseteket. Ehhez pedig nem kell mást tenni, mint megadni egy olyan egységnyi hosszúságú vektort, amelynek az iránya megegyezik az erő irányával.



4. ábra

Ha a két objektumot A-val és B-vel jelöljük, és ezek az $\mathrm{r_A}$ ill. $\mathrm{r_B}$ helyvektorral jelzett pontokban helyezkednek el (4. ábra), akkor az A-ból a B-be mutató egységvektor:

$$\mathrm{e_{A\to B}} = \frac{\mathrm{r_B} - \mathrm{r_A}}{|\mathrm{r_B} - \mathrm{r_A}|}.$$

A B-ből az A-ba mutató egységvektor pedig:

$$\mathrm{e}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = -\mathrm{e}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} \frac{\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}}{|\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}}|,$$

ahol $|\mathrm{r}_\mathrm{B} - \mathrm{r}_\mathrm{A}| = |\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}|$ az $\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}$ vektor hossza, azaz az A és B pontok távolsága. Ebből a gravitációs erő általános vektoralakja, ha az A pontban m_A, a B pontban m_B tömeget helyezünk el:

a) Az m_A tömegre ható gravitációs erő:

$$\mathrm{F}_\mathrm{A} = f \frac{m_\mathrm{A} \cdot m_\mathrm{B}}{|\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}|^2} \cdot \mathrm{e}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = f \frac{m_\mathrm{A} \cdot m_\mathrm{B}}{|\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}|^2} \cdot \frac{\mathrm{r}_\mathrm{B} - \mathrm{r}_\mathrm{A}}{|\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}|}.$$

b) Az m_B tömegre ható gravitációs erő:

$$\mathrm{F}_\mathrm{B} = f \frac{m_\mathrm{A} \cdot m_\mathrm{B}}{|\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}|^2} \cdot \mathrm{e}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = f \frac{m_\mathrm{A} \cdot m_\mathrm{B}}{|\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}|^2} \cdot \frac{\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}}{|\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}|}.$$

A Coulomb erő általános alakja csak annyiban tér el ettől, hogy figyelembe kell venni a töltések előjelét is.

a) A Q_A (előjelesen vett) töltésre ható Coulomb erő:

$$\mathrm{F}_\mathrm{A} = -k \frac{Q_\mathrm{A} Q_\mathrm{B}}{|\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}|^2} \cdot \mathrm{e}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = k \frac{Q_\mathrm{A} Q_\mathrm{B}}{|\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}|^2} \cdot \frac{\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}}{|\mathrm{r}_\mathrm{A} - \mathrm{r}_\mathrm{B}|}.$$

ahol a mínusz előjel azért szükséges, mert ha a tőkések előjele azonos, akkor nyilvánvalóan az iránnyal ellentétes irányú taszító erő lép fel.

b) A Q_B töltésre így

$$\mathrm{F}_\mathrm{B} = -k \frac{Q_\mathrm{B} Q_\mathrm{A}}{|\mathrm{r}_\mathrm{B} - \mathrm{r}_\mathrm{A}|^2} \cdot \mathrm{e}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = k \frac{Q_\mathrm{B} Q_\mathrm{A}}{|\mathrm{r}_\mathrm{B} - \mathrm{r}_\mathrm{A}|^2} \cdot \frac{\mathrm{r}_\mathrm{B} - \mathrm{r}_\mathrm{A}}{|\mathrm{r}_\mathrm{B} - \mathrm{r}_\mathrm{A}|}.$$

Coulomb erő hat.