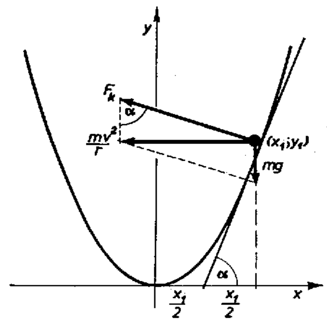
Messük el a paraboloidot egy, a tengelyén átmenő síkkal, és vegyük fel az ábra szerinti koordináta-rendszert! A síkon való áthaladás pillanatában a golyó koordinátái legyenek x_1 és y_1.



(F_k a falra merőleges kényszererő)

Ha a golyó vízszintes síkban mozog, a rá ható erők eredőjének vízszintes irányú centripetális erőt kell szolgáltatnia.

Az ábráról látható, hogy

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{mv^2/r}{mg} = \frac{v^2}{r \cdot g}.$$

Felhasználható az a parabola-tulajdonság, hogy bármely pontban húzott érintő az érintési pont abszcisszájának felénél metszi a csúcsérintőt (lásd az ábrát).

Így az érintő meredeksége:

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{y_1}{x_1/2} = \frac{2y_1}{x_1}.$$

Összevetve a két egyenletet:

$$\frac{2y_1}{x_1} = \frac{v^2}{r \cdot g}.$$

r éppen egyenlő x_1-gyel, tehát

$y_1 = \dfrac{v^2}{2g}$ a keresett magasság.

Az energiákra vonatkozóan, ha eredményünket

$$g \cdot y_1 = v^2/2$$

alakban írva, megszorozzuk az egyenletet m-mel, azt kapjuk, hogy

$$mgy_1 = mv^2/2,$$

vagyis a helyzeti és mozgási energia egyenlő.

Simon Judit (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., IV. o. t.)

Breuer Pál (Bp., Apáczai Csere J. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Belátható, hogy ha a forgástestet az $y = ax^n$ függvényből származtatjuk, akkor a pálya $y_1 = v^2/(n \cdot g)$ magasságban van (n természetes szám). A keresett magasság nem függ a-tól. Ekkor:

$$n \cdot g \cdot y_1 = v^2 \qquad \text{és}$$
$$\frac{n}{2} \cdot g \cdot y_1 \cdot m = mv^2/2,$$

tehát a mozgási energia $n/2$-szerese a helyzeti energiának.

Pl. kúp esetén: $n = 1$, $y_1 = v^2/g$ és $W_{\text{mozg}} = (1/2)W_{\text{helyz}}$

Bálványos Zoltán (Makó, József A. Gimn., IV. o. t.)