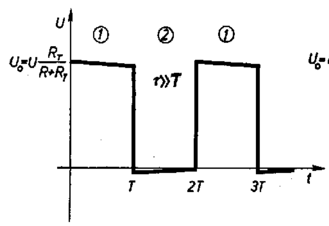
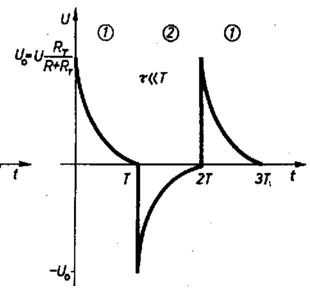
I. megoldás. a) Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor az időállandó nagyon nagy a kapcsolgatás periódusidejéhez képest.

A kapcsoló 1-es állásában a kondenzátor az $R+R_{\mathrm{T}}$ ellenálláson keresztül elkezd feltöltődni. A kezdetben $I=U/(R+R_{\mathrm{T}})$ nagyságú töltőáram exponenciálisan csökken, a feltételezett nagy időállandó miatt azonban az átkapcsolás pillanatáig elenyésző ez a csökkenés. Így az R_{T} ellenálláson eső kezdeti $U_0=U\dfrac{R_{\mathrm{T}}}{R+R_{\mathrm{T}}}$ feszültség is csak nagyon lassan csökken.

A kapcsolót 2-es állásba téve a kondenzátorba betáplált töltések ellenkező irányban áramlanak át az R_{T} ellenálláson, így azon U_0 feszültségugrás jön létre. Feltevésünk szerint azonban ez a negatív feszültség elhanyagolható. Az R_{T} ellenálláson tehát gyakorlatilag U_0 amplitúdójú négyszögfeszültség jelenik meg (1. ábra).



1. ábra



2. ábra

b) Ha az időállandó nagyon kicsi a szaggatás periódusidejéhez képest, akkor a kondenzátor jóformán teljesen feltöltődik az U feszültségre, így az R_{T} ellenálláson kezdetben megjelenő $U_0=U\dfrac{R_{\mathrm{T}}}{R+R_{\mathrm{T}}}$ feszültség gyorsan leesik nullára. A kapcsolót a 2-es állásba hozva a telep szerepét a kondenzátor veszi át, és pontosan ugyanaz játszódik le a fordított irányban (2. ábra).

Szalai Gábor (Bp., Piarista Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Oldjuk meg a feladatot általánosan, amikor a $\tau=(R+R_{\mathrm{T}})C$ időállandó és a kapcsolgatási frekvencia viszonyára nem teszünk semmiféle kikötést. Tegyük fel, hogy a kapcsoló egyaránt T ideig van az 1-es és a 2-es állásban. (Akit érdekel a probléma, megoldhatja úgy is, hogy a T_1 és a T_2 különböző.)

Ha a kapcsoló 2-es állapotba való kapcsolásának pillanatában $Q^{(2)}$ töltés van a kondenzátorban, akkor t idő múlva

$$q(t)=Q^{(2)}e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{1}$$

lesz. A feszültsége pedig

$$U_C^{(2)}(t)=\frac{q(t)}{C}=\frac{Q^{(2)}}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{2}$$

Ha az 1-es állásba való kapcsolás pillanatában $Q^{(1)}$ töltés van a kondenzátoron, akkor úgy foghatjuk fel a dolgot, hogy egyszerre két folyamat játszódik le (szuperpozíció elve), egyrészt a $Q^{(1)}$ töltésű kondenzátor az (1) egyenletnek megfelelő módon kisül, másrészt az U feszültségű telep az $R+R_{\mathrm{T}}$ ellenálláson keresztül az exponenciális függvény szerinti árammal tölti a kondenzátort. Így az eredő töltés:

$$q(t)=Q^{(1)}e^{-\frac{t}{\tau}}+C\cdot U\left[1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \tag{3}$$

és a kondenzátor feszültsége:

$$U_C^{(1)}=\frac{Q^{(1)}}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}+U\left[1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right]. \tag{4}$$

Eddig a két állásban csak általánosságban vizsgáltuk, hogy mi a helyzet akkor, ha bizonyos kezdeti töltés van a kondenzátoron, most ennek a kezdeti töltésnek (ill. feszültségnek) a pontos meghatározását tűzzük ki feladatul.

Tegyük fel, hogy a $t=0$ pillanatban a kapcsoló 1-es állásban van, és a kondenzátor töltése $Q_0^{(1)}=0$, vagyis ekkor kezdődik a feltöltődés. A (3) képlet szerint

$$q(t)=C\cdot U\left[1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right].$$

Tehát $t=T$-kor a 2-es állásba való első átkapcsolás pillanatában a kondenzátor töltése

$$Q_1^{(2)}=CU\left[1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right].$$

T idő alatt ez lecsökken

$$Q_1^{(1)} = Q_1^{(2)} \cdot e^{-\frac{T}{\tau}} = CU\left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right] \cdot e^{-\frac{T}{\tau}}$$

értékre. Vagyis az első 1-es állásba való átkapcsolás után a töltődés ennyi töltésnek a jelenlétében kezdődik. A (3) formula szerint a T idő alatt ebből

$$Q_2^{(2)} = Q_1^{(1)} e^{-\frac{T}{\tau}} + CU\left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right] = CU\left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right] \cdot \left[e^{-\frac{2(1-1)T}{\tau}} + e^{-\frac{2(2-1)T}{\tau}}\right]$$

lesz. Vagyis ennyi töltés kezd kisülni a második 2-es állásba való átkapcsolás pillanatában. Ebből már látszik az a szabály, hogy a k-adik 2-es állásba való átkapcsolás pillanatában a kondenzátor töltése:

$$Q_k^{(2)} = CU\left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right] \cdot \left[1 + e^{-\frac{2T}{\tau}} + e^{-\frac{4T}{\tau}} + \ldots + e^{-\frac{2(k-1)T}{\tau}}\right].$$

A második zárójelben található mértani sort összegezve:

$$Q_k^{(2)} = C \cdot U \cdot \left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right] \frac{1 - e^{-\frac{2T}{\tau}k}}{1 - e^{-\frac{2T}{\tau}}} = C \cdot U \cdot \frac{1 - e^{-\frac{2T}{\tau}k}}{1 + e^{-\frac{T}{\tau}}},$$

ahol felhasználtuk azt,hogy

$$1 - e^{-\frac{2T}{\tau}} = \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) \cdot \left(1 + e^{-\frac{T}{\tau}}\right).$$

Ebből egyszerűen $e^{-\frac{T}{\tau}}$-val szorozva kapjuk a k-adik 1-es állásba való kapcsolás pillanatában a kondenzátoron levő töltést:

$$Q_k^{(1)} = C \cdot U \frac{1 - e^{-\frac{2T}{\tau}k}}{1 + e^{-\frac{T}{\tau}}} e^{-\frac{T}{\tau}}.$$

A $Q_k^{(1)}$ és $Q_k^{(2)}$ kezdeti töltéseket a (2) és (4) egyenletekbe helyettesítve tetszőleges időpontban felírhatjuk a kondenzátor feszültségét. Ebből a k-adik 1-es állásban az R_T ellenálláson eső feszültség:

$$U_\mathrm{T}^{(1)}(t)_k = (U - U_C^{(1)}(t)_k) \frac{R_\mathrm{T}}{R + R_\mathrm{T}} = U_0 \frac{1 + e^{-\frac{T}{\tau}(2k+1)}}{1 + e^{-\frac{T}{\tau}}} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

a k-adik 2-es állásban pedig

$$U_\mathrm{T}^{(2)}(t)_k = -U_C^{(2)}(t)_k \cdot \frac{R_\mathrm{T}}{R + R_\mathrm{T}} = -U_0 \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau} \cdot 2k}}{1 + e^{-\frac{T}{\tau}}} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Összefoglalva tehát a k-adik 1-es állás elején az R_T-n eső feszültség

$$U_\mathrm{T}^{(1)}(t = 0)_k = U_0 \frac{1 + e^{-\frac{T}{\tau}(2k+1)}}{1 + e^{-\frac{T}{\tau}}}, \tag{5}$$

amely exponenciálisan csökken az

$$U_\mathrm{T}^{(1)}(t = T)_k = U_0 \frac{1 + e^{-\frac{T}{\tau}(2k+1)}}{1 + e^{-\frac{T}{\tau}}} e^{-\frac{T}{\tau}} \tag{6}$$

értékre. A $(k + 1)$-edik 2-es állásba való kapcsoláskor U_0 feszültségugrás következik be, ezért

$$U_\mathrm{T}^{(2)}(t = 0)_{k+1} = -U_0 \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau}2(k+1)}}{1 + e^{-\frac{T}{\tau}}} = U_\mathrm{T}^{(1)}(T)_k - U_0, \tag{7}$$

ez is exponenciálisan csökken az

$$U_\mathrm{T}^{(2)}(t = T)_{k+1} = -U_0 \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau}2(k+1)}}{1 + e^{-\frac{T}{\tau}}} e^{-\frac{T}{\tau}} = U_\mathrm{T}^{(1)}(0)_{k+1} - U_0 \tag{8}$$

értékre, innen az 1-es állapotba egy újabb U_0 feszültségugrással kerül.

Most vizsgáljuk a feszültséget a T/τ hányados függvényében; mint az kiderül, a helyzet korántsem olyan egyszerű. Külön kell választani a kis és a nagy k esetét.

A) Ha k kicsi, akkor

a) ha $\tau \gg T$ (a kis k-n itt azt értjük, hogy még a $kT/\tau \ll 1$ is teljesül, akkor az

$$e^{-\frac{T}{\tau}} \qquad \text{és} \qquad e^{-\frac{T}{\tau}(2k+1)} \text{ közelítőleg egy, ezért}$$

$$U_{\mathrm{T}}^{(1)}(t=T)_k \approx U_0, \qquad U_{\mathrm{T}}^{(2)}(t=0)_k \approx 0.$$

b) ha $\tau \ll T$ (ekkor k-tól eléggé független a helyzet), így az

$$e^{-\frac{T}{\tau}} \qquad \text{és} \qquad e^{-\frac{T}{\tau}2(k+1)}$$

közelítőleg nulla, ezért

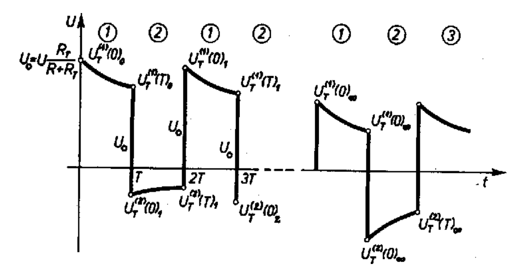
$$U_{\mathrm{T}}^{(1)}(t=T)_k \approx 0, \qquad U_{\mathrm{T}}^{(2)}(t=0)_k \approx -U_0.$$

B) Ha a k tart a végtelenhez, akkor az (5) és (7) egyenletekből látszik, hogy egyre lejjebb tolódik az átlagos feszültségszint, de idővel beáll egy bizonyos egyensúlyi helyzet, amikor az 1-es állásban pontosan annyi töltés táplálódik be a kondenzátorba, hogy a 2-es állásbeli részleges kisülés után ugyanannyi töltés lesz benne, mint az előző töltés elején. Az (5)-től (8)-ig terjedő képletekben ez annak felel meg, hogy elhagyhatjuk a nullához tartó $e^{-\frac{2T}{\tau}k}$ tagot. Tehát az egyensúlyi állapotban:

$$U_{\mathrm{T}}^{(1)}(0)_\infty = U_0 \frac{1}{1+e^{-\frac{T}{\tau}}}, \qquad U_{\mathrm{T}}^{(1)}(T)_\infty = U_0 \frac{1}{1+e^{-\frac{T}{\tau}}} e^{-\frac{T}{\tau}},$$

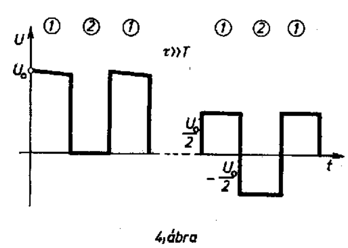
$$U_{\mathrm{T}}^{(2)}(0)_\infty = -U_0 \frac{1}{1+e^{-\frac{T}{\tau}}}, \qquad U_{\mathrm{T}}^{(2)}(T)_\infty = -U_0 \frac{1}{1+e^{-\frac{T}{\tau}}} e^{-\frac{T}{\tau}}.$$

Vagyis akármilyen a T/τ hányados, végeredményben mindig megegyezik az 1-es és a 2-es állapotban a feszültséggörbe alakja, csak éppen az előjelük eltérő (3. ábra).

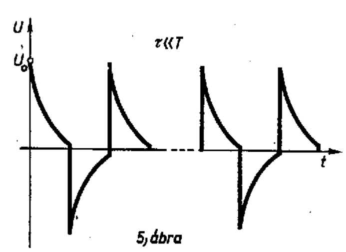


3. ábra

Az egyes τ értékek esetén csak az a különbség, hogy nagy τ esetén közel négyszög alakú (1/2) U_0 amplitúdójú, kicsi τ esetén pedig U_0, amplitúdójú inkább háromszög alakúnak mondható jelet kapunk (4. és 5. ábra).



4. ábra



5. ábra

Spitzer József (Bp., Vörösmarty M. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján
Dózsa Márton kiegészítésével