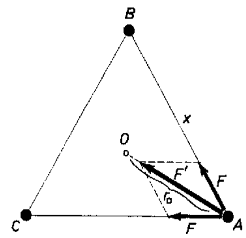
Szimmetria miatt a testek a háromszög súlyvonalain mozognak, minden időpillanatban egy szabályos háromszög csúcsaiban helyezkednek el és a háromszög középpontjában találkoznak.



Ha a testek távolsága x (1. ábra), akkor az A testre a másik kettő $F = fm^2/x^2$ nagyságú gravitációs vonzóerővel hat. Ezek vektori összege a középpont felé mutat és nagysága $F' = \sqrt{3}F$. Ez az erő a középpontból mért $r_0 = x/\sqrt{3}$ távolsággal kifejezve

$$F' = f\frac{m^2}{\sqrt{3r_0^2}}.$$

Bevezetve az $M = m/\sqrt{3}$ jelölést, $F' = f\dfrac{mM}{r_0^2}$. Látható, hogy az A testre ható erő helyettesíthető a középpontban rögzített M tömegű test gravitációs vonzóerejével. Kepler I. törvényéből tudjuk, hogy a pálya általában ellipszis, jelen esetben azonban a nulla kezdősebesség miatt egyenes. Ez olyan ellipszisnek tekinthető, melynek kistengelye elhanyagolhatóan rövid a nagytengelyhez képest. Az indítás pillanatában a középponttól mért távolság $a/\sqrt{3}$, így az ellipszis félnagytengelye $a/(2\sqrt{3})$. A találkozásig eltelt idő a keringési idő fele, Kepler III. törvénye alapján csak a nagytengely hosszától függ. Abban a speciális esetben, mikor a pálya $R = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$ sugarú kör, a keringési időt egyszerűen meghatározhatjuk. ω szögsebességnél a centripetális gyorsulás $R\omega^2$, ezt az F' gravitációs erő hozza létre, tehát

$$f\frac{mM}{R^2} = mR\omega^2.$$

Innen $\omega = 2\pi/T = \sqrt{\dfrac{fM}{R^3}}$. M és R értelmezésére szolgáló összefüggések felhasználásával

$$\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{24fm}}.$$

A számításnál a testeket pontszerűnek tekintettük és nem vettük figyelembe, hogy csak $2r$ távolságra közelíthetik meg egymást. Ez azonban a találkozásig eltelt időt nem befolyásolja lényegesen, mert a numerikus adatok szerint $r \ll a$.

A testek sebességét a találkozás pillanatában az energiatétel segítségével határozhatjuk meg. Egymástól x távolságban levő, egyenként m tömegű testek a gravitációs vonzóerő miatt $-fm^2/x$ helyzeti energiával rendelkeznek. A negatív előjel arra utal, hogy kisebb távolsághoz kisebb energia tartozik. (A gravitációs potenciálról bővebben a K. M. L. XXIV. kötet 233. old. *Kovács Mihály:* Erőterek szemléletes ábrázolása c. cikkében olvashatunk.) Induláskor a testek összenergiája (a helyzeti energiát páronként számolva) $E_1 = -3fm\dfrac{m^2}{a}$. A találkozás pillanatában az összes energia $E_2 = 3\dfrac{mv^2}{2} - 3f\dfrac{m^2}{2r}$ ahol v a testek sebessége. Az energia-tétel alapján $E_1 = E_2$. Rendezés után

$$v = \sqrt{2fm\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{a}\right)}. \qquad (1)$$

Ha r lényegesen kisebb, mint a, akkor $1/2r$ mellett $1/a$ elhanyagolható, és (1) így alakul:

$$v = \sqrt{\frac{fm}{r}}.$$

Ha az ütközés tökéletesen rugalmas, akkor a testek sebességcsökkenés nélkül pattannak vissza, és mozgásuk a visszafelé játszott filmhez hasonlóan a korábbi mozgás fordítottja lesz. Így az indulás után T idővel ismét a kiindulási helyen lesznek, majd további $T/2$ idő elteltével megint a középpontban találkoznak.

Numerikus adatokkal, az $f = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$ érték felhasználásával.

$$T/2 = 1{,}1.10^6\ \mathrm{s} = 12\ \text{nap}\ 20\ \text{óra},$$
$$v = 1{,}05 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s} = 0{,}105\ \mathrm{mm/s}.$$

László István (Győr, Czuczor Gergely Gimn., IV. o. t.)
és *Spitzer József* (Bp., Vörösmarty M. Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A testek kezdetben nyugalomban voltak, így a rendszer súlypontja is állt. Külső erő hatása nélkül a súlypont a mozgás során végig mozdulatlan, így a találkozás helye csak a súlypont lehet.

Görög Imre (Bp., Kaffka M. Gimn., IV. o. t.)

2. Úgy látszik, a golyók nem földi anyagból vannak, hiszen a numerikus adatokat használva sűrűségükre 44,2 kg/dm^3-t nyerünk.

Bálványos Zoltán (Makó, József A. Gimn., IV. o. t.)