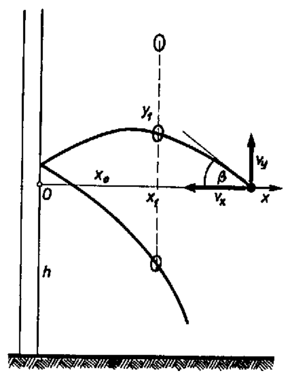
I. megoldás. a) A fallal való rugalmas ütközéskor a ferde hajítást végző golyó függőleges sebességösszetevője változatlan marad, a vízszintes pedig ellenkező irányú, de ugyanakkora lesz. Így a karikával történő első, ill. második (t_1, ill. t_2 időpontbeli) találkozás feltétele (1. ábra):

$$\begin{aligned}
&v_\mathrm{y}(t_1-t_0)-g(t_1-t_0)^2/2=y_1-vt_1,\\
&v_\mathrm{x}(t_1-t_0)=x_1-x_0, \qquad \text{ill.}\\
&v_\mathrm{y}(t_2-t_0)-g(t_2-t_0)^2/2=y_1-vt_2,\\
&v_\mathrm{x}(t_2-t_0)=x_1+x_0.
\end{aligned}$$



1. ábra

Az egyenleteket megoldva a sebességösszetevők:

$$v_\mathrm{x}=\sqrt{g(x_1^2-x_0^2)/2y_0}, \qquad v_\mathrm{y}=x_1\sqrt{2gy_0/(x_1^2-x_0^2)}-v, \tag{1}$$

ahol $y_0=y_1-vt_0$ a karika magassága $0x$ felett a t_0 időpontban, a kilövési szög pedig

$$\operatorname{tg}\beta=v_\mathrm{y}/v_\mathrm{x}. \tag{2}$$

A képletekből a nyilvánvaló $x_1>x_0$-n kívül

$$y_0=y_1-vt_0>0, \quad \text{tehát} \quad t_0<\frac{y_1}{v} \tag{3}$$

megoldhatósági feltétel is kiolvasható. Másrészt a kívánt második találkozás csak úgy jöhet létre, ha t_2 időpontig a karika nem ér földet: $y_1+h>vt_2$, felhasználva a $t_2=(x_1+x_0)/v_\mathrm{x}+t_0$ összefüggést és v_x kifejezését

$$h>v\sqrt{\frac{2y_0}{g}\cdot\frac{x_1+x_0}{x_1-x_0}}-y_0. \tag{4}$$

Numerikus adataink esetében a következőket kapjuk.

1. A megoldhatósági feltételek teljesülnek, $v_\mathrm{x}\approx 32$ cm s^{-1}, $v_\mathrm{y}\approx 157$ cm s^{-1}, $\beta\approx 78{,}6^\circ$ (felfelé kell lőnünk).
2. $y_0=0$, végtelen nagy v_x kellene, nincs megoldás.
3. (4) nem teljesül, nincs megoldás.

b) A kétszeri találkozás feltételei most:

$$\begin{aligned}
&v_\mathrm{y}(t_1-t_0)-g(t_1-t_0)^2/2=y_1-gt_1^2/2,\\
&v_\mathrm{x}(t_1-t_0)=x_1-x_0, \qquad \text{ill.}\\
&v_\mathrm{y}(t_2-t_0)-g(t_2-t_0)^2/2=y_1-gt_2^2/2,\\
&v_\mathrm{x}(t_2-t_0)=x_1+x_0.
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása helyett egy egyszerű meggondolással könnyebben célhoz juthatunk. Mivel a golyó és a karika gyorsulása egyenlő, azért kétszeri találkozás csak úgy lehetséges, ha a függőleges sebességük és a föld feletti magasságuk is állandóan megegyezik (ui. ha pl. az első találkozáskor $v_\mathrm{y}>v$, akkor az egyenlő gyorsulás miatt a golyó függőlegesen egyre jobban eltávolodik a karikától, újabb találkozás nem lehetséges), így a függőleges sebességösszetevő kilövéskor

$$v_\mathrm{y}=gt_0 \tag{5}$$

és

$$y_1 = (1/2)gt_0^2,$$

tehát

$$t_0 = \sqrt{\frac{2y_1}{g}} \tag{6}$$

is szükséges.

Mint látjuk, ebben az esetben a golyót csak egyetlen, az y_1 által meghatározott pillanatban indíthatjuk úgy, hogy a kétszeri találkozás létrejöjjön.

Az indítási sebesség vízszintes összetevőjére csak az ad korlátozást, hogy a második találkozásig a testek ne érjenek földet:

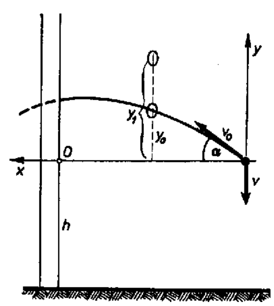
$$\frac{g}{2}\left(\frac{x_1 + x_0}{v_\mathrm{x}} + t_0\right)^2 < h + y_1; \tag{7}$$

az ezt kielégítő bármilyen v_x, megfelel.

Numerikus adatainkkal egyik esetben sem teljesül a (6) feltétel, így nincs megoldás.

Szamosujvári Sándor (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás (2. ábra). Az a) esetben egy a t_0 pillanatban elindított, v sebességgel lefelé haladó koordinátarendszert használunk. Ebben a karika állandóan $y_0 = y_1 - t_0 v$ magasan van az x tengely felett, a golyó mozgása itt is ferde hajítás, csak v_x, $v_\mathrm{y} + v$ sebességösszetevőkkel. A megvalósítandó feladat ebben a rendszerben: úgy kilőni a golyót, hogy odafelé és visszapattanva is átmenjen a rögzített $(x_1 - x_0, y_0)$ ponton. Ez pedig nyilván csak akkor lehetséges, ha a golyó ugyanazon a pályán tér vissza, amin kilőttük (mert a visszapattanás utáni pálya tükörképe a szabad továbbrepülésnek), tehát ha az a pálya tetőpontján ütközik a falnak.



2. ábra

Ezeket a feltételeket felírva, ha a kilövési sebesség, ill. szög (a mozgó koordinátarendszerben) v_0, ill. α, akkor

$$x_1 - x_0 = v_0 \cos\alpha t_1, \qquad y_0 = v_0 \sin\alpha t_1 - gt_1^2/2, \qquad x_1 = v_0^2 \sin 2\alpha/2g.$$

Az egyenletrendszert megoldva: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2x_1 y_0}{x_1^2 - x_0^2}$,

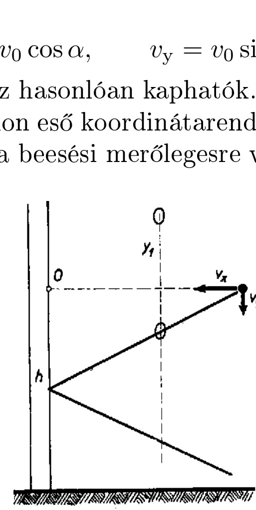
$$v_0 \sin\alpha = x_1\sqrt{\frac{2gy_0}{x_1^2 - x_0^2}}, \qquad v_0\cos\alpha = \sqrt{\frac{g}{2y_0}(x_1^2 - x_0^2)},$$

és a keresett sebességösszetevők:

$$v_\mathrm{x} = v_0 \cos\alpha, \qquad v_\mathrm{y} = v_0 \sin\alpha - v.$$

A megoldhatóság feltételei az első megoldáshoz hasonlóan kaphatók.

A b) esetben t_0 pillanatban elejtett, szabadon eső koordinátarendszert használunk. Most a kilőtt golyó pályája egy β szögű egyenes, a visszapattanás után pedig a beesési merőlegesre vett tükörkép (3. ábra).



3. ábra

A karika ebben a rendszerben gt_0 állandó sebességgel fog lefelé mozogni. Az állandó sebességek miatt kétszeri találkozás csak úgy lehetséges, ha a két test függőleges sebessége megegyezik: $v_{\mathrm{y}} = gt_0$, s állandóan egy magasságban vannak, tehát

$$y_1 = (1/2)g\,t_0^2, \qquad t_0 = \sqrt{\frac{2y_1}{g}}.$$

A v_{x}-re való korlátozás pedig az előző megoldáshoz hasonlóan kapható.

Spitzer József (Bp., Vörösmarty M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A megoldók jelentős hányada nem végezte el a numerikus számításokat, ami pedig a feladatnak nem elhanyagolható része. A másik gyakori hiba, sokan nem gondolják meg a számítási eredmények fizikai tartalmát.

2. Sok a feleslegesen bonyolult, hosszadalmas megoldás. Törekedjünk a tömörségre, s megjegyzést, kiegészítést csak akkor közöljünk, ha érdeklődésre számot tartó, tanulságos problémát vet fel. A felesleges nyújtás, érdektelen problémák tárgyalása a dolgozat értékét csökkenti.