I. megoldás. Legyen m_1 a kis golyó tömege, v_1 az ütközés előtti, u_1 az ütközés utáni sebessége, m_2, v_2, u_2 ugyanazon mennyiségek a nagy golyóra, ennek tehetetlenségi nyomatéka I, szögsebessége ω.

Felírhatjuk az energiamegmaradást (mivel teljesen rugalmas az ütközés):

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Az utolsó tag azért lép be, mert bármely $\mu_0 \neq 0$ tapadási súrlódásnál a nagy golyó ütközéskor azonnal gördülni kezd.

A súrlódási erő külső hatóerő, a két golyóra az ütközésnél *nem érvényes* a mozgásmennyiség-megmaradási tétel.

A külső súrlódási erőnek azonban a nagy golyó pillanatnyi forgási tengelyére az ütközés pillanatában a forgató nyomatéka nulla. Ezért az ütközésnél erre a pontra felírható az impulzus-nyomaték megmaradási tétele:

$$m_1 v_1 \cdot r = m_1 u_1 r + m_2 u_2 r + I \cdot \omega.$$

Mivel $I = (2/5) m_2 r^2$ és $r \cdot \omega = u_2$ (tökéletes gördülés), azért

$$m_1 v_1^2 = m_1 u_1^2 + (7/5) m_2 u_2^2$$

és

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + (7/5) m_2 u_2.$$

Átalakítva:

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = (7/5) m_2 u_2^2,$$
$$m_1(v_1 - u_1) = (7/5) m_2 u_2.$$

Osszuk el egymással a két egyenletet, ekkor nyerjük:

$$v_1 + u_1 = u_2.$$

Ezt beírva a második egyenletbe:

$$m_1(v_1 - u_1) = (7/5) m_2 (v_1 + u_1).$$

Innen

$$u_1 = \frac{m_1 - (7/5) m_2}{m_1 + (7/5) m_2} \cdot v_1 \qquad \text{és} \qquad u_2 = u_1 + v_1.$$

Numerikus adatokkal:

$$u_1 = \frac{8\ \text{kg} - (7/5) \cdot 28{,}8\ \text{kg}}{9\ \text{kg} + (7/5) \cdot 28{,}8\ \text{kg}} \cdot 30\ \text{m/s} = -20{,}07\ \text{m/s}$$

és

$$u_2 = -20{,}07\ \text{m/s} + 30\ \text{m/s} = 9{,}93\ \text{m/s}.$$

Walthier Tamás (Bp., Piarista Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. A nagy golyó az ütközés után a talajjal való érintkezési pont körül fordul el. Erre a pontra nézve a golyó tehetetlenségi nyomatéka (a Steiner-tételből):

$$I = (2/5) m r^2 + m r^2 = (7/5) m r^2.$$

Az impulzusnyomatékot felírva:

$$M \cdot t = I \cdot \omega,$$
$$F \cdot r \cdot t = (7/5) m r^2 \cdot v/r, \qquad \text{ebből} \qquad F \cdot t = (7/5) m \cdot v,$$

vagyis a gördülés olyan, mintha a mozgásmennyiségben a nagy golyó tömege 7/5-szörösére növekedett volna.

A rugalmas ütközés két szakaszra bontható. Az első szakaszban az álló golyó felgyorsul, a mozgó lelassul, míg egy közös sebességet elérnek, közben rugalmas deformáció keletkezik rajtuk, a második szakaszban pedig eredeti alakjukat visszanyerve, szétlökődnek.

Az első szakaszra az impulzusmegmaradás elve:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \big(m_1 + (7/5) m_2\big) \cdot c, \qquad \text{ahol} \qquad v_2 = 0.$$

A közös sebesség

$$c = \frac{m_1 v_1}{m_1 + (7/5)m_2}.$$

Ha a második szakaszban a testek teljesen visszanyerik eredeti alakjukat, az erőlökés ugyanakkora, mint az első szakaszban (tökéletesen rugalmas ütközés):

$$F \cdot t = m_1(c - u_1) = m_1(v_1 - c), \quad u_1 = 2c - v_1, \quad \text{és ugyanígy} \quad u_2 = 2c - v_2.$$

Numerikusan:

$$c = \frac{8\ \mathrm{kg} \cdot 30\ \mathrm{m/s}}{8\ \mathrm{kg} + (7/5) \cdot 28{,}8\ \mathrm{kg}} = 4{,}96\ \mathrm{m/s};$$

és így

$$u_1 = 2 \cdot 4,96\ \mathrm{m/s} - 30\ \mathrm{m/s} = -20{,}08\ \mathrm{m/s},$$
$$u_2 = 2 \cdot 4,96\ \mathrm{m/s} = 9{,}92\ \mathrm{m/s}$$

$(v_2 = 0)$.

Angster Judit (Pécs, Nagy Lajos Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A feladat megoldható a súrlódás figyelmen kívül hagyásával is, ekkor a két megmaradási törvényben a forgást leíró tag zérus lesz. Így egy szokványos ütközési feladathoz jutunk, ahol $u_1 = 16{,}96$ m/s és $u_2 = 13{,}04$ m/s (1 pont). Sok feladatmegoldó kiszámította a kis golyó mozgását az ütközés után. Ez vízszintes hajítás, az egyszerűsített esetben 16,96 m/s kezdősebességgel. Vigyázni kell azonban, mert az esési magasság nem 20 cm, csak a két golyó sugarának különbsége. A kis golyó sugara az $r^3 : R^3 = V_1 : V_2 = m_1 : m_2$ arányból számítható. (Ezt külön is értékeltük 1 ponttal.)

Sok megoldó először súrlódás nélkül számította ki a nagy golyó sebességét, és csak ezután számolt a csúszó súrlódás hatására létrejövő forgással. Az elgondolás hibája abból is kitűnik, hogy így a súrlódási együtthatótól függően néhány másodperc nagyságrendű ideig csúszna a golyó, ami lehetetlen.