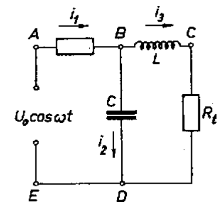
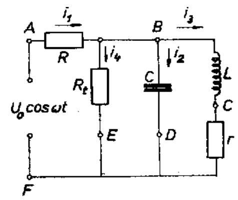
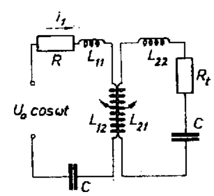


a)



b)



c)

(Gaál István cikkében szereplő jelöléseket alkalmazzuk, I. K. M. L. 1968. évi 8–9. szám 165. o.)

a) kapcsolás. Kirchhoff I. törvényét a B csomópontra, II. törvényét pedig az $ABDE$ és a BCD körökre felírva három egyenletet kapunk:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t), \tag{1}$$

$$Ri_1(t) + \frac{1}{C}q(t) = U_0 \cos\omega t, \tag{2}$$

$$Li_3'(t) + R_t i_3(t) - \frac{1}{C}q(t) = 0; \tag{3}$$

ahol $q(t)$ a kondenzátor pillanatnyi töltése:

$$i_2(t) = q'(t). \tag{4}$$

Ez a négyismeretlenes egyenletrendszer megoldható. Nekünk nyilvánvalóan csak $i_3(t)$-re van szükségünk, ezért a többi változót megpróbáljuk algebrai módszerekkel kiejteni. A (2) és (3) egyenletekben vegyük a bennük szereplő mennyiségek változásának a sebességét, (4) felhasználásával:

$$Ri_1'(t) + \frac{1}{C}i_2(t) = -U_0\omega \sin\omega t, \tag{5}$$

$$Li_3''(t) + R_t i_3'(t) - \frac{1}{C}i_2(t) = 0. \tag{6}$$

Kifejezve $i_2(t)$-t (6)-ból és $i_1(t)$-t (1)-ből, majd az (5)-be helyettesítve olyan egyenletet kapunk, melyben csak az $i_3(t)$ függvény az ismeretlen:

$$RLCi_3'''(t) + (L + RR_tC)i_3'' + (R + R_t)i_3' + U_0\omega \sin\omega t = 0. \tag{7}$$

Keressük az $i_3(t)$ ismeretlen függvényt

$$i_3(t) = I \sin(\omega t + \varphi) \tag{8}$$

alakban. Az idézett cikk alapján

$$i_3'(t) = I\omega \cos(\omega t + \varphi), \tag{9}$$

$$i_3''(t) = -I\omega^2 \sin(\omega t + \varphi), \tag{10}$$

$$i_3'''(t) = -I\omega^3 \cos(\omega t + \varphi). \tag{11}$$

(7)-be helyettesítve, a $\sin\omega t$ és a $\cos\omega t$ együtthatói el kell, hogy tünjenek:

$$(R + R_t - \omega^2 RLC)\sin\varphi + \omega(L + RR_tC)\ \cos\varphi = U_0/I, \tag{12}$$

$$(R + R_t - \omega^2 RLC)\cos\varphi - \omega(L + RR_tC)\ \sin\varphi = 0. \tag{13}$$

Az áram amplitúdójának értékét a két egyenlet négyzetösszegéből kifejezhetjük, és így az R_t ellenálláson megjelenő feszültség amplitúdója

$$U = I \cdot R_t = \frac{U_0 R_t}{\sqrt{(R + R_t - \omega^2 RLC)^2 + \omega^2 (L + RR_tC)^2}}, \tag{14}$$

vagyis

$$U = \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1 \omega^4 + \gamma_2 \omega^2 + \gamma_3}} \tag{15}$$

alakú a feszültség, ahol az α és a γ-k konstansok.

A (13) egyenletből

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R + R_t - \omega^2 RLC}{\omega(L + RR_tC)}, \tag{16}$$

így az R_t ellenálláson megjelenő feszültség

$$u_t(t) = U \sin(\omega t + \varphi), \tag{17}$$

ahol U és φ a (14) és (16) egyenletekben adottak.

b) kapcsolás. Kirchhoff I. törvényét a B csomópontra, II. törvényét pedig az $ABEF$, a BCE és a BDE körökre felírva négy egyenletet kapunk:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) + i_4(t), \tag{18}$$

$$Ri_1(t) + R_t i_4(t) = U_0 \cos \omega t, \tag{19}$$

$$Li_3'(t) + ri_3(t) - R_t i_4(t) = 0, \tag{20}$$

$$\frac{1}{C} q(t) - R_t i_4(t) = 0; \tag{21}$$

valamint tudjuk, hogy

$$i_2(t) = q'(t). \tag{22}$$

Az *a)* kapcsolásnál végzett számításokhoz hasonlóan ez az egyenletrendszer algebrai módszerekkel a következőre redukálható:

$$\begin{aligned} LRR_tCi_4''(t) + (LR + LR_t + rRR_tC)i_4'(t) + \\ +(rR + RR_t + rR_t)i_4(t) + U_0(\omega L \sin \omega t - r \cos \omega t) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Az $i_4(t)$ megoldásfüggvényt keressük a (8)–(9)–(10) képleteknek megfelelő alakban:

$$i_4(t) = I \ \sin(\omega t + \varphi). \tag{24}$$

(23)-ba helyettesítve $\sin \omega t$ és $\cos \omega t$ együtthatója el kell, hogy tűnjék:

$$(rR + RR_t + rR_t - \omega^2 LRR_tC) \ \cos \ \varphi - \omega(LR + LR_t + rRR_tC) \sin \varphi = -\frac{\omega L}{I} U_0, \tag{25}$$

$$(rR + RR_t + rR_t - \omega^2 LRR_tC) \sin \varphi + \omega(LR + LR_t + rRR_tC) \cos \varphi = \frac{r}{I} U_0. \tag{26}$$

A két egyenlet négyzetösszegéből a keresett feszültség amplitúdója:

$$U = IR_t = U_0 R_t \sqrt{\frac{r^2 + \omega^2 L^2}{(rR + RR_t + rR_t - \omega^2 LRR_tC)^2 + \omega^2 (LR + LR_t + rRR_tC)^2}}. \tag{27}$$

Azaz (15)-höz hasonlóan

$$U = \sqrt{\frac{\alpha_1 \omega^2 + \alpha_2}{\gamma_1 \omega^4 + \gamma_2 \omega^2 + \gamma_3}}. \tag{28}$$

(25)-öt r-rel, (26)-ot ωL-lel beszorozva és összeadva megkapjuk a fázisszöget:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(R + R_t)(r^2 + \omega^2 L^2) + rRR_t}{\omega RR_t \big[C(r^2 + \omega^2 L^2) - L\big]}, \tag{29}$$

így az R_t ellenálláson megjelenő feszültség

$$u_i(t) = U \ \sin(\omega t + \varphi); \tag{30}$$

ahol U és φ a (27) és (29) egyenletekben adottak.

c) kapcsolás. (Az ábra elvi kapcsolási rajz. Valójában az L_{11}, illetve L_{22} önindukciós együtthatók nem függetlenek és nem választhatóak külön az L_{12}, illetve L_{21} kölcsönös indukciós együtthatóktól. Ugyanez volt a helyzet a b) esetben az L önindukciós együtthatójú tekercs r veszteségi ellenállásával is.)

Kirchhoff II. törvényét mind a két körre külön-külön felírjuk ($q_1(t)$ a bal oldali, $q_2(t)$ a jobb oldali kondenzátor töltése):

$$Ri_1(t) + L_{11}i_1'(t) + L_{12}i_2'(t) + \frac{1}{C}q_1(t) = U_0 \cos\omega t, \tag{31}$$

$$R_t i_2(t) + L_{22}i_2'(t) + L_{21}i_1'(t) + \frac{1}{C}q_2(t) = 0, \tag{32}$$

valamint

$$i_1(t) = q_1'(t), \tag{33}$$

$$i_2(t) = q_2'(t) \tag{34}$$

és

$$L_{12} = L_{21}. \tag{35}$$

A töltéseket kiejtve kapjuk, hogy

$$Ri_1'(t) + L_{11}i_1''(t) + L_{12}i_2'(t) + \frac{1}{C}i_1(t) = -U_0\omega \sin\omega t, \tag{36}$$

$$R_t i_2'(t) + L_{22}i_1''(t) + L_{21}i_1''(t) + \frac{1}{C}i_2(t) = 0. \tag{37}$$

Ebből az egyenletrendszerből $i_1(t)$-t ki kellene ejteni, de ez közvetlenül lehetetlen. Vegyük észre, hogy ha a megoldásokat (8) mintájára

$$i_1(t) = I_1 \sin(\omega t + \varphi) \tag{38}$$

és

$$i_2(t) = I \sin(\omega t + \varphi) \tag{39}$$

alakban keressük, akkor a (8) és (10) egyenletekből láthatóan az

$$i_1''t = -\omega^2 i_1(t) \tag{40}$$

és az

$$i_2''(t) = -\omega^2 i_2(t) \tag{41}$$

összefüggések teljesülnek. Ezekkel könnyen megkaphatjuk a kívánt egyenletet:

$$\begin{gathered} RR_tC^2 i_2''(t) + \left[(1-\omega^2 L_{11}C)R_tC + (1-\omega^2 L_{22}C)RC\right] i_2'(t) + \left[(1-\omega^2 L_{11}C)\cdot\right. \\ \left.\cdot(1-\omega^2 L_{22}C) - \omega^4 L_{12}^2 C^2\right] i_2(t) + U_0\omega \sin\omega t = 0. \end{gathered} \tag{42}$$

A már ismert technikával kiszámíthatjuk a (39) képletben szereplő I, illetve az U feszültség-amplitúdó értékét, illetve a fázisszög tangensét:

$$\begin{gathered} U = IR_t = \\ = \frac{U_0 R_t L_{12} C^2 \omega^3}{\left[(1-\omega^2 L_{11}C)(1-\omega^2 L_{22}C) - \omega^2 L_{12}^2 C^2 - \omega^2 RR_tC^2\right]^2 + \omega^2\left[(1-\omega^2 L_{11}C)R_tC + (1-\omega^2 L_{22}C)RC\right]^2}, \end{gathered} \tag{43}$$

azaz (15)-höz és (26)-hoz hasonlóan

$$U = \frac{\alpha\omega^3}{\sqrt{\gamma_1\omega^8 + \gamma_2\omega^6 + \gamma_3\omega^4 + \gamma_4\omega^2 + \gamma_5}}; \tag{44}$$

illetve

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega\left[(1-\omega^2 L_{11}C)R_tC + (1-\omega^2 L_{22}C)RC\right]}{(1-\omega^2 L_{11}C)(1-\omega^2 L_{22}C) - \omega^4 L_{12}^2 C^2 - \omega^2 RR_tC^2}. \tag{45}$$

Az R_t ellenálláson megjelenő feszültség a (43) és (45) képletekben adott mennyiségekkel

$$u_t(t) = U \ \sin(\omega t + \varphi). \tag{46}$$

(Több dolgozat alapján)