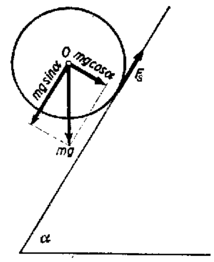
**I. megoldás.** Az $m$ tömegű, $I$ tehetetlenségi nyomatékú hengerre $mg\sin\alpha$ nagyságú mozgatóerő és $F_s$ súrlódási erő hat (1. ábra).




*1. ábra*

A test súlypontjának gyorsulását az alábbi mozgásegyenlet határozza meg:

(1) $$ma = mg\sin\alpha - F_s.$$

A súrlódási erő forgatónyomatéka a súlypontra $F_s r$ ($r$ a henger sugara), így a henger $\beta$ szöggyorsulása a forgómozgás alapegyenlete szerint

(2) $$\beta = F_s r/I.$$

Az (1) és (2) egyenletrendszerben három ismeretlen szerepel ($F_s$, $a$ és $\beta$), ezért még egy összefüggésre van szükségünk. Két eset lehetséges. Ha a súrlódási együttható elég nagy, akkor a test sima legördülést végez. Ennek feltétele az, hogy

(3) $$a = r\beta$$

teljesüljön. Az (1), (2) és (3) egyenletekből

$$F_s = \frac{mg\sin\alpha}{mr^2/I + 1},$$

mely az $I = mr^2/2$ összefüggés felhasználásával $F_s = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$ alakra hozható. Ezt a súrlódási erőt az $F_{ny} = mg\cos\alpha$ nyomóerő hozza létre, és így fenn kell, hogy álljon az $F_s \le \mu F_{ny}$ egyenlőtlenség. Behelyettesítve és $mg\cos\alpha$-val egyszerűsítve kapjuk, hogy $\mu \ge (1/3)$ tg $\alpha$. Mivel $\alpha = 60^\circ$ és $\mu = 0{,}1$ értékek ezt nem elégítik ki, így sima legördülés nem jöhet létre, hanem a henger csúszik a lejtőn. Ekkor a (3) egyenlet nem érvényes, helyette viszont felírhatjuk, hogy a súrlódási erő a maximális

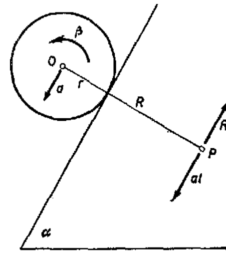
(3') $$F_s = mg\mu\cos\alpha$$

értéket veszi fel. Az (1), (2) és (3') egyenletek megoldása

(4) $$a = g\ (\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

(5) $$\beta = \frac{2g\ \mu\cos\alpha}{r}.$$

A pillanatnyi forgástengely a testnek (vagy meghosszabbításának) olyan része, melynek pillanatnyi sebessége nulla. A súlyponttól $OP = R$ távolságra fekvő $P$ pont $t$ idővel a mozgás megkezdése után $v_1 = at$ lejtőirányú és $v_2 = R\beta t$ kerületi sebességgel rendelkezik (2. ábra).




*2. ábra*

Ezek összege akkor lesz nulla, ha $v_1 = v_2$ és az $OP$ merőleges a lejtő síkjára. A pillanatnyi forgástengely tehát a henger súlypontjától

$$R = \frac{at}{\beta t} = \frac{r}{2\mu}(\mathrm{tg}\ \alpha - \mu)$$

távolságra helyezkedik el. Numerikus adatokkal $a = 8,0\ \mathrm{m/s^2}$ és $R = 8{,}2\ r$.

*Varga Zsuzsanna* (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t. )

**II. megoldás.** Az *a)* kérdésre megadhatjuk a választ az energiatétel felhasználásával is. A test helyzeti energiája mozgási és forgási energiává alakul, valamint fedezi a súrlódási erő munkáját. A henger $t$ idő alatt $s_1 = at^2/2$, kerületi pontjai a forgás miatt $s_2 = r\beta t^2/2$ utat tesznek meg. A két elmozdulás ellentétes irányú, így a súrlódási erő csak $s_1 - s_2$ az úton végez munkát. A henger súlypontjának sebessége $v = at$, szögsebessége $\omega = \beta t$. Az energiatétel:

$$mgs\ \sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\mu\cos\alpha\cdot(s_1 - s_2). \tag{6}$$

Figyelembe véve, hogy $\beta = \dfrac{r\mu mg\cos\alpha}{I}$, ezt (6)-ba helyettesítve az egyszerűsítések után megkapjuk a (4) alatti eredményt.

*Dombi Gábor* (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t. )

*Megjegyzés.* Sok megoldó tévesen a hengernek lejtővel érintkező alkotóját tekintette pillanatnyi forgástengelynek. Ez csak sima legördülésnél helyes.