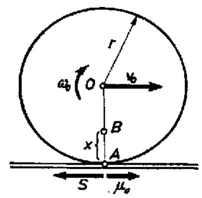
Tekintsük v_0-t és ω_0-t a rajz szerinti jelölésben pozitívnak! A korong és a sík A érintkezési pontjának sebessége $u_0 = v_0 - r\omega_0$. v_0 és ω_0 előjele, illetve nagysága szerint sokféle esetet különböztethetünk meg, a további számolásban azonban csak u_0 előjelének van jelentősége.



1. Legyen $u_0 > 0$, vagyis $v_0 > r\omega_0$! Ilyenkor a korongra $S = mg\mu$ súrlódási erő hat (a rajz szerinti irányítással). A testre S erő és Sr forgatónyomaték hat, így a súlypontjának a gyorsulására és a β szöggyorsulásra a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{S} &= -ma, \\ Sr &= I\beta, \\ a &= -g\mu \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \text{ahol } I \text{ a tehetetlenségi nyomaték} \\ \text{Ezekből } \beta = mg\mu r/I. \end{array}$$

A korong sebessége, illetve szögsebessége t idő múlva:

(1) $$v = v_0 - g\mu t, \qquad \text{és}$$

(2) $$\omega = \omega_0 + (mg\mu r/I)t.$$

Az A pont sebessége $u = v - r\omega$, behelyettesítés után:

(3) $$u = u_0 - g\mu t(1 + mr^2/I).$$

Ez a megoldás csak addig érvényes, amíg $u > 0$. Egy bizonyos t_0 időpontban $u = 0$ teljesül, ettől kezdve a korong tiszta legördülést végez. (3) alapján

$$t_0 = \frac{u_0}{g\mu \cdot (1 + mr^2/I)},$$

A korong sebessége ekkor (1) szerint

(4) $$v_{t_g} = v_0 - g\mu t_g = \frac{\dfrac{mr^2}{I} v_0 + r\omega_0}{1 + \dfrac{mr^2}{I}}.$$

Határozzuk meg a rajzon B-vel jelölt pillanatnyi forgástengely helyzetét! Bármely két pont B-re vonatkoztatott szögsebessége megegyezik, így az O és A pontoké is. Ha az AB távolságot x-szel jelöljük, akkor a következőt kapjuk:

$$\frac{v}{r - x} = \frac{-u}{x}, \qquad \text{honnan} \qquad x = \frac{-ru}{v - u}.$$

Helyettesítsük be u és v értékét (3) és (1)-ből:

$$x = \frac{-\left[u_0 - g\mu t(1 + mr^2/I)\right]}{r\omega_0 + (mr^2/I)g\mu t} r.$$

Az indulás pillanatában ($t = 0$) $x = \dfrac{v_0 - r\omega_0}{\omega_0} < 0$ (ha ω_0 pozitív), tehát a forgástengely a sík alatt helyezkedik el, $t = t_0$-ra pedig $x = 0$, vagyis a forgástengely az A pontig tolódott el. Ettől kezdve valósulhat meg a tiszta legördülés.

2. Ha $u_0 < 0$, akkor a súrlódási erő $-S = mg\mu$. A kiindulási egyenletek:

$$a = g\mu, \qquad \beta = -\frac{mg\mu r}{I}.$$

Az 1. eset számolásához hasonlóan járunk el és a következő összefüggéseket kapjuk:

$$t_0 = \frac{-u_0}{g\mu\left(1 + \dfrac{mr^2}{I}\right)} = \frac{r\omega_0 - v_0}{g\mu\left(1 + \dfrac{mr^2}{I}\right)};$$

$$x = \frac{-\left[u_0 + g\mu t\left(1 + \dfrac{mr^2}{I}\right)\right]}{r\omega_0 - \dfrac{mr^2}{I} g\mu t} r.$$

$t = 0$-ban $x = -\dfrac{v_0 - r\omega_0}{\omega_0} > 0$ (ha ω_0 pozitív), tehát a forgástengely A fölött helyezkedik el. $t = t_0$-ra ismét A lesz a forgástengely, a tiszta legördülés követelményének megfelelően.

3. Ha $u_0 = 0$, akkor már az indulástól kezdve tiszta legördülés valósul meg, e forgástengely pedig mindig az A pont. Ha kihasználjuk, hogy egy homogén korong tehetetlenségi nyomatéka $I = (1/2)mr^2$, akkor láthatóvá válik, hogy eredményeink függetlenek a korong tömegétől. A súrlódási együtthatótól csak t_0 és x függ, a kialakuló végsebesség azonban (4) szerint nem.

Torma Tibor (Budapest, Fazekas M. Gimn., I. o. t.) és
Váradi József (Budapest, Ságvári E. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján