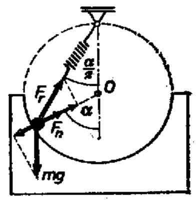
Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a golyó a körpályán tartózkodik. A testre hat az mg nehézségi erő, a rugó $F_r = D\Delta l$ húzóereje és a körpálya F_n reakcióereje.



1. ábra

Az előbbi kettőt felbontva sugárirányú és érintőleges komponensekre, majd az összegzést elvégezve, az eredő sugárirányú, ill. érintőleges erő:

(1) $$F_1 = F_n + F_r \cos\alpha/2 - mg\cos\alpha,$$

(2) $$F_2 = mg\sin\alpha - F_r\sin\alpha/2.$$

Itt – amíg a golyó körpályán mozog, – F_1 adja a centripetális erőt:

(3) $$F_1 = m\frac{v^2}{r}.$$

A test elengedésekor $F_r = 0$, $F_2 = mg\sin\alpha$ – s ennek hatására megindul a körpályán lefelé, fokozatosan növekvő sebességgel. De ez a rugó megnyúlását vonja maga után, amelynek kettős hatása van: egyrészt visszafelé húzza a testet, másrészt igyekszik a pályáról leemelni. A test sebessége a mechanikai energiamegmaradás elve alapján számítható:

$$mg\Delta h = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}D\Delta l^2,$$

a helyzeti energia egy része mozgási és rugóenergiává alakul. Innen

$$v^2 = 2g\Delta h - \frac{D\Delta l^2}{m}.$$

Behelyettesítve a

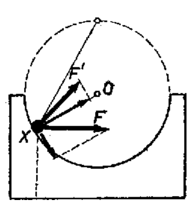
$$\Delta h = r(\cos\alpha - \cos\alpha_0),$$
$$\Delta l = 2r(\cos\alpha/2 - \cos\alpha_0/2)$$

értéket:

(4) $$v = \sqrt{2r\left[g(\cos\alpha - \cos\alpha_0) - \frac{2Dr}{m}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha_0}{2}\right)^2\right]}.$$

Nyugalmi helyzet nem jöhet létre, s ezt a következőképpen láthatjuk be.

A testre ható erők eredője csak a rugó és súlyerővektorok által közbezárt szögtartományban lehet. Ha az eredő az OX és a súlyerő közötti tartományba esik (F), akkor érintőleges összetevője a testet lefelé gyorsítja, nyugalom nem lehet. Ha ez nem teljesül, akkor viszont az eredő (F') sugárirányú komponense a testet O felé húzza, s előbb leemeli a pályáról, mintsem hogy az megállhatna; ez akkor következik be, amikor a csökkenő sebességnek (hiszen most F' érintőleges összetevője lassít!) megfelelő mv^2/r centripetális erő kisebb lesz a kérdéses összetevőnél.



2. ábra

Annak a feltétele, hogy a rugó ne emelje le a golyót a pályáról, az, hogy az (1)-ből kifejezett F_n nyomóerő ≥ 0 legyen:

$$F_1 - mg\cos\alpha - F_r\cos\alpha/2 \geq 0.$$

Betéve F_1 és F_r értékét:

$$\frac{mv^2}{r} + mg\cos\alpha \geq 2Dr\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha_0}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ide (4)-ből v^2-et behelyettesítve megkapjuk α-ra a pályán maradás feltételét:

$$6\cos^2\frac{\alpha}{2}(mg - Dr) + 10\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_0}{2}Dr - 4\cos^2\frac{\alpha_0}{2}(mg + DR) - mg \geq 0.$$

Dr-rel osztva, s bevezetve az $a = \dfrac{mg}{Dr}$ jelölést, látjuk, hogy α és α_0 értéke határozza meg a mozgás lefolyását:

(5) $$6\cos^2\frac{\alpha}{2}(a-1) + 10\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_0}{2} - 4\cos^2\frac{\alpha_0}{2}(a+1) - a \geq 0.$$

(5) megoldása

(6)
$$\begin{array}{ll} a > 1 \text{ esetén:} & \cos\dfrac{\alpha}{2} \geq \dfrac{A - 5\cos\alpha_0/2}{6(a-1)}, \\[2ex] a < 1 \text{ esetén:} & \dfrac{5\cos\alpha_0/2 - A}{6(1-a)} \leq \cos\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{5\cos\alpha_0/2 + A}{6(1-a)}, \\[2ex] a = 1 \text{ esetén:} & \cos\dfrac{\alpha}{2} \leq \dfrac{8\cos^2\alpha/2 + 1}{10\cos\alpha_0/2}, \end{array}$$

ahol

$$A = \sqrt{a^2(24\cos^2\alpha_0/2 + 6) - 6a + \cos^2\alpha_0/2}.$$

Amíg α eleget tesz a (6) egyenlőtlenségeknek, a golyó a körpályán marad. Ellenkező esetben lelép róla; s további mozgását leírni nem tudjuk (pontról-pontra változó görbületi sugarú pálya – s így a centripetális erőt nem tudjuk kiszámítani – lásd az 1965. évi tanulmányi verseny II. fordulójának 1. feladatát: KML 1965. év 7. sz. 82. o.), de ez nem is célunk.

Adataink esetén:

1. (6)-ból $0{,}8 < \cos\alpha/2 < 2{,}1$ adódik, ami $0 \leq \alpha \leq 60^\circ$ esetén mindig teljesül, tehát a golyó a mélypontig a körpályán marad. A túlsó oldalon felfelé menet teljesen hasonlóan mozog, olyan magasra és fel, mint amilyenről indult, majd ismét lefelé indul, s csillapítatlan lengéseket végez (az energiaveszteségeket elhanyagoltuk).

2. (6)-ból most $0{,}722 < \cos\alpha/2 < 0{,}982$, ebből $21{,}8^\circ < \alpha < 87{,}6^\circ$ tehát $a_k \approx 21{,}8^\circ$ kritikus szögnél a rugó leemeli a körpályáról a testet, amely eddig azon mozgott.

Maróti Péter (Szeged, Ságvári E. g. III. o. t.) és
Tél Tamás (Bp., Apáczai Csere J. III. o. t.)
dolgozata alapján, kiegészítésekkel

Megjegyzések. 1. Több dolgozat szerzője indokolatlanul feltételezte, hogy a test végig a pályán marad, ha a mélyponton az (5) vagy ennek megfelelő más alakú egyenlet teljesül. Ez általában nem igaz, pl. ha $a = 0{,}5$, $\alpha = 90^\circ$, akkor $0{,}74 < \cos\alpha/2 < 1{,}6$, s ebből $0 \leq \alpha < 84{,}6^\circ$, amit az $\alpha = 0$ mélypont kielégít, pedig a golyó rögtön az induláskor elhagyja a pályát.

2. *Balogh Gábor* (Bp., Radnóti M. g., III. o. t.) megkísérelte a 2. adatrendszer esetén a golyó pályájának meghatározását a körpálya elhagyása után, pontról-pontra közelítő számítással, s az eredményt grafikonon tüntette fel.