

1. ábra

Az 1. ábra jelöléseit használva írjuk fel Newton II. törvényét a forgómozgásra:

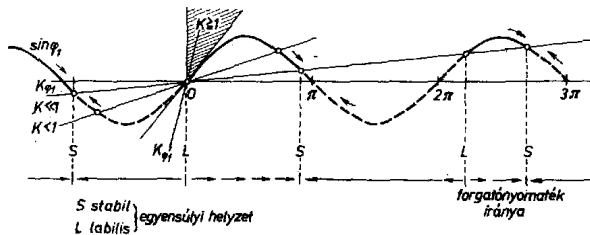
$$(1) \quad I\beta = mg(l/2) \sin(\varphi + \varphi_1) - D(\varphi + \varphi_1 - \varphi_0),$$

ahol  $I = ml^2/3$  a homogén rúd tehetetlenségi nyomatéka;  $\beta$  a szöggyorsulás;  $\varphi_0$  a megfeszítetlen rugó helyzete;  $\varphi_1$  az inga egyensúlyi helyzete;  $\varphi$  az inga egyensúlyi helyzetétől mért kitérés.

Mivel  $\varphi_1$  egyensúlyi helyzet,  $\varphi = 0$ -nál  $\beta \neq 0$ , így az (1) egyenletből

$$(2) \quad \frac{2D}{mgl}(\varphi_1 - \varphi_0) = \sin \varphi_1.$$

A (2) egyenlet grafikus ábrázolásából láthatjuk (2. ábra), hogy az egyenletnek tetszőlegesen sok gyöke lehet, ha a  $K = 2D/mgl$  érték elég kicsi.



2. ábra

2. ábra

Ez fizikailag azt jelenti, hogy ha a rugó elég gyenge, akkor sokszori körbefordítás után is találunk olyan helyzetet, ahol a rúd súlyának forgatónyomatéka egyensúlyt tud tartani a rugó forgatónyomatékával.

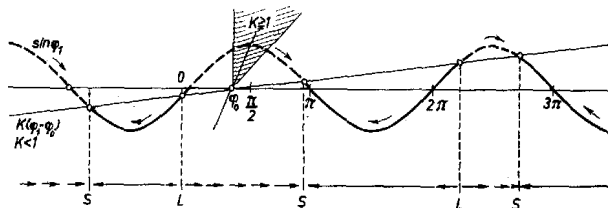
A fent meghatározott egyensúlyi helyzetek körül rezgőmozgás akkor jön létre, ha az abból való kitéréskor visszahúzó forgatónyomaték lép fel. Nagy kitérés esetén a rezgőmozgás nem lesz harmonikus, de kis kitérés esetén  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$ . Ezt és a (2) egyenletet felhasználva, az (1) egyenletből az

$$(3) \quad I\beta = -[D - mg(l/2) \cos \varphi_1] \varphi$$

egyenletet kapjuk. Ez egy  $\omega = \sqrt{[D - (mgl/2) \cos \varphi_1] \frac{1}{I}}$  körfrekvenciájú harmonikus torziós rezgés egyenlete. Mivel  $\omega^2 > 0$ , a rezgőmozgás feltétele az, hogy  $D - (mgl/2) \cos \varphi_1 > 0$  legyen.

$$\text{A lengéside} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D - (mgl/2) \cos \varphi_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{2ml^2/3}{2D - mgl \cos \varphi_1}}.$$

Nagyobb kitérés esetén is rezgőmozgás jön létre (nem fog a rúd a végtelenségig ugyanabba az irányba forogni), de ez nem egy egyensúlyi helyzet körül történik. A 2. és a 3. ábrán látható, hogy a stabilis és nem stabilis egyensúlyi helyzetek egymásután felváltva következnek.



3. ábra

Így egyetlen egyensúlyi helyzet körül akkor jön létre rezgés, ha a kitérés kisebb a hozzá legközelebb levő labilis egyensúlyi helyzet távolságánál. A 2. ábra a  $\varphi_0 = 0$  esetet, a 3. pedig a  $\varphi_0 \neq 0$  esetben lehetséges helyzeteket mutatja.