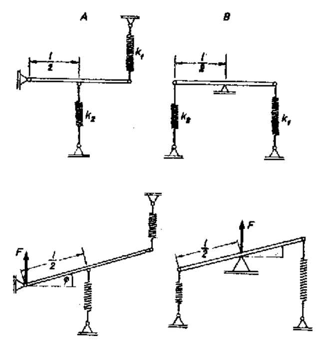
A feladat megoldását az *a)* eset tárgyalásával kezdjük. A *b)* esetre hasonló módszereket lehet alkalmazni, ezért ott csak az analóg egyenletek felsorolására szorítkozunk.




Amikor a rúd egyensúlyban van, a rá ható erők és forgatónyomatékok összege nulla. Ha a rudat kimozdítjuk a pozitív forgásirányba $\varphi$ szöggel, akkor a forgómozgás egyenlete a csuklóra mint tengelyre vonatkoztatva

$$I\,\beta = -k_1 l^2 \varphi - k_2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 \varphi \tag{1}$$

alakú. Itt $I$ jelenti a rúd végpontjára vonatkoztatott $(1/3)\ ml^2$ tehetetlenségi nyomatékét, és $\beta$ a szöggyorsulást. Ha a csapban az ábra szerinti $F$ erő hat, akkor a tömegközéppont tételét alkalmazva az

$$m\frac{l}{2}\beta = F - k_2\frac{l}{2}\varphi + k_1 l\varphi \tag{2}$$

egyenletet kapjuk. A kényszerfeltételt azáltal használtuk ki, hogy a tömegközéppont gyorsulása $\frac{l}{2}\beta$.

Az 1. egyenletet átalakítva a

$$\beta = -\frac{\left(k_1 + \frac{k_2}{4}\right) l^2\varphi}{I} \tag{3}$$

egyenlethez jutunk. Összehasonlítva a rezgőmozgás egyenletével, láthatjuk, hogy

$$\omega^2 = \frac{(k_1 + k_2/4)l^2}{I} = \frac{3(k_1 + k_2/4)}{m},$$

vagyis a rezgésidő

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3(k_1 + k_2/4)}}$$

A mozgás időbeni változását a $\varphi = \varphi_0 \sin\omega t$ összefüggés adja meg.

A csuklóban ébredő erőt a 2. egyenlet határozza meg.

$$F = m\frac{l}{2}\beta + k_2\frac{l}{2}\varphi + k_1 l\varphi.$$

Hogy ne szerepeljen külön a szöggyorsulás és a kitérés is, a 3. egyenlet segítségével a szöggyorsulást kiejtjük. Ily módon megkapjuk az erő

$$F = -m\frac{l}{2}\frac{3(k_1 + k_2/4)}{m}\varphi + k_2\frac{l}{2}\varphi = l\left(-\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{8}k_2\right)\varphi_0 \sin\omega t$$

alakú időtől való függését.

A 2. egyenletben nem vettük figyelembe, hogy a nyugalmi állapotban a rugók már feszült állapotban vannak. Ez az egyenletben csak a rúd tömegétől, és a rugók nyugalmi megfeszítésétől függő, de időtől független erőjárulékot ad az $F$-ben.

A *b)* esetben az előző megoldás menetét követve a megfelelő egyenlet a forgatónyomatékokra:

$$I\beta = -k_1\left(\frac{l}{2}\right)^2\varphi - k_2\left(\frac{l}{2}\right)^2\varphi.$$

Itt $I$ a rúdnak a középpontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, azaz $\frac{1}{12}ml^2$.

Ezekből az egyenletekből a frekvenciára és a lengésidőre az

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{3m} \quad \text{és} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{k_1 + k_2}} \text{ kifejezést kapjuk.}$$

Mivel ebben az esetben a tömegközéppont nem mozog, a tömegközéppont tétele

$$0 = F - k_1\frac{l}{2}\varphi + k_2\frac{l}{2}\varphi.$$

Ebből az egyenletből határozható meg az alátámasztási pontban ébredő kényszererő.

$$F = (k_1 - k_2)\frac{l}{2}\varphi = (k_1 - k_2)\frac{l}{2}\varphi_0 \sin\omega t.$$

*Takács László* (Sopron, Széchenyi I. g. IV. o. t.)