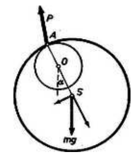
I. megoldás. A karika súlypontja egy $R-r$ sugarú körpályán fog mozogni, melynek középpontja az O pont.Határozzuk meg a szöggyorsulást a nyugalmi helyzettől számított α kitérés esetén!

A karika súlypontjában mg nagyságú függőleges súlyerő, a henger és a karika A érintkezési pontjában ismeretlen nagyságú és irányú P erő hat.



Célszerű az A pont körüli forgásra felírni a forgómozgás dinamikai alapegyenletét, mert erre a pontra P forgatónyomatéka zérus.

(1) $$M = \mathrm{I}_A \cdot \beta_A,$$

ahol β_A az A pont körüli forgás szöggyorsulása, I_A pedig az A pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték. Jelen esetben

(2) $$M = -mgR\sin\alpha,$$

valamint Steiner tétele alapján (lásd KML XXIX. évf. 5. sz. és 31. évf. 5. sz.)

$$I_A = I_s + mR^2 = 2mR^2.$$

Mivel az A pont helyzete a mozgás folyamán változik, a β_A helyett az O pontra vonatkozó β_0 szöggyorsulásra kell áttérnünk. A két mennyiség közti kapcsolatot a súlypont kerületi gyorsulása adja.

$$a_s = R\beta_A = (R-r)\beta_0, \quad \text{ahonnan}$$

(4) $$\beta_A = \frac{R-r}{R}\,\beta_0.$$

Behelyettesítve (1)-be (2), (3) és (4) eredményeit, a lehetséges egyszerűsítések után

(5) $$\beta_0 = -\frac{g}{2(R-r)}\sin\alpha.$$

Az eredményt összehasonlítva egy l hosszúságú fonálinga

(6) $$\beta = -\frac{g}{l}\sin\alpha$$

mozgásegyenletével, azt tapasztaljuk, hogy a karika mozgását egy olyan egyenlet írja le, mint egy $l = 2(R-r)$ hosszúságú fonálinga mozgását meghatározó egyenlet. Innen

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}.$$

II. megoldás. Határozzuk meg a helyzeti és mozgási energiát α szögelfordulás és az O pontra vonatkoztatott ω_0 szögsebesség esetén! A súlypont magasságemelkedése $(R-r)(1-\cos\alpha)$, így a helyzeti energia

(7) $$E_h = mg(R-r)(\mathrm{I}-\cos\alpha).$$

A mozgási energia kiszámításánál a karika mozgását A pont körüli forgásként tekintjük (ahol az A pont a mozgás során változik). Az első megoldásban alkalmazott módszer segítségével kiszámíthatjuk az A-ra vonatkozó ω_A szögsebességet. A súlypont kerületi sebességét felírva mindkét pontra

$$v_s = R\omega_A = (R-r)\omega_0,$$

ahonnan

(8) $$\omega_A = \frac{R-r}{R}\omega_0.$$

A mozgási energia

(9) $$E_m = \frac{1}{2} I_A \omega_A^2.$$

Felhasználva, hogy $I_A = 2mR^2$, (8)-t (9)-be helyettesítve

(10) $$E_m = m(R-r)^2\omega_0^2.$$

Összehasonlítva a kapott eredményt egy I tehetetlenségi nyomatékú, s súlyponttávolságú fizikai inga megfelelő

(7') $$E_h' = mgs(1-\cos\alpha),$$

(10') ill. $$E_m' = \frac{1}{2}\, I\omega^2$$

egyenleteivel, a következő összefüggéseket kapjuk

$$s = R - r, \quad I = 2m(R-r)^2.$$

Ezek segítségével a lengésidő

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgs}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}.$$

Megjegyzés. A megoldásokban felhasználtuk a fonálinga, ill. a fizikai inga lengésidőképletét. Mivel ezek csak kis kitérés esetén helyesek, a fenti eredmények is csak ebben az esetben érvényesek.