Vezessük be a következő jelöléseket! A kondenzátorok kapacitása $C_1 = 1$ pF és $C_2 = 1,5$ pF, a lemezek távolsága a kezdő pillanatban $d_1 = 20$ cm és $d_2 = 20$ cm. A kondenzátorokban levő össztöltés $Q = 0{,}1$ C. A lemezek távolodási sebessége v_1 és v_2 (közeledés esetén v negatív szám).

Határozzuk meg t időpillanatban az egyes kondenzátorokon levő töltést! A párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok feszültsége:

$$U(t) = \frac{Q_1(t)}{C_1(t)} = \frac{Q_2(t)}{C_2(t)}.$$

Az elektromos töltés megmaradása miatt az össztöltés mindvégig

$$Q = Q_1(t) + Q_2(t).$$

Mivel a síkkondenzátor kapacitása $C = k\dfrac{F}{d}$ alakban írható (F a lemezek felszíne), ezért

$$C_1(t) = C_1\frac{d_1}{d_1 + v_1 t} \qquad \text{és} \qquad C_2(t) = C_2\frac{d_2}{d_2 + v_2 t},$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$Q_1(t) = Q\frac{\dfrac{C_1 d_1}{d_1 + v_1 t}}{\dfrac{C_1 d_1}{d_1 + v_1 t} + \dfrac{C_2 d_2}{d_2 + v_2 t}} \qquad \text{és} \qquad Q_2(t) = Q\frac{\dfrac{C_2 d_2}{d_2 + v_2 t}}{\dfrac{C_1 d_1}{d_1 + v_1 t} + \dfrac{C_2 d_2}{d_2 + v_2 t}}.$$

A kérdés az, hogy milyen erősségű áramnak kellett az egyes pillanatokban folynia ahhoz, hogy a t pillanatban a C_1 kondenzátoron $Q_1(t)$ töltés legyen. Erre a kérdésre a felelet megadása kb. olyan nehéz, mint változó sebességű mozgás esetén a pillanatnyi sebességnek az út-idő függvényből való meghatározása. Sőt ez a hasonlóság olyan szoros, hogy itt is lényegében ugyanazt a módszert alkalmazhatjuk. Először a pillanatnyi áramerősség helyett azt határozzuk meg, hogy a t és $t + \Delta t$ időpillanatok között milyen $\overline{I(t)}$ átlag áram növelte volna a t pillanatbeli $Q_1(t)$ töltést a $t + \Delta t$ pillanatbeli $Q_1(t + \Delta t)$-re. Mivel az áramerősség az időegységnyi idő alatt szállított töltés mennyisége, ezért Δt idő alatt:

$$\Delta Q = Q_1(t + \Delta t) - Q_1(t) = \overline{I(t} \cdot \Delta t;$$

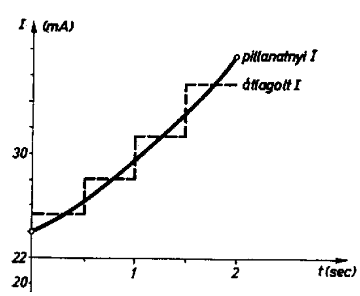
ebből

$$\overline{I(t)} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \left(\frac{Q}{1 + \dfrac{C_2 d_2}{C_1 d_1}\cdot\dfrac{d_1 + v_1(t + \Delta t)}{d_2 + v_2(t + \Delta t)}} - \frac{Q}{1 + \dfrac{C_2 d_2}{C_1 d_1}\cdot\dfrac{d_1 + v_1 t}{d_2 + v_2 t}}\right)\frac{1}{\Delta t}.$$

Behelyettesítve a numerikus értékeket:

a) Ha a C_1 kondenzátor lemezeit közelítjük, ekkor $v_1 = -10$ cm/s és $v_2 = +10$ cm/s.

$$\overline{I(t)} = \frac{2{,}4}{(10 - t)(10 - t - \Delta t)} \text{ A}.$$



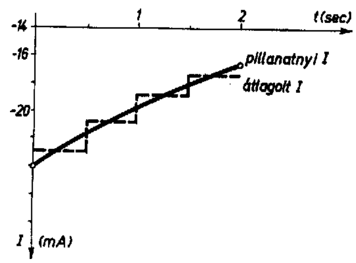
1. ábra

Az 1. ábrán látható, hogy $\Delta t = 0{,}5$ s esetén az egyes intervallumokban milyen átlag áramerősségeket kapunk. A pillanatnyi áramerősségeket azonban ez a lépcsős görbe nem adja meg helyesen, de ha kisebb Δt értéket veszünk, akkor a vizsgált idő alatt kisebb lesz az áramerősség megváltozása, ezért az átlagérték közelebb lesz a pillanatnyi értékhez. Határesetben $\Delta t = 0$, az ekkor kapott értéket tekinthetjük a pillanatnyi áramerősségnek:

$$I(t) = \frac{2{,}4}{(10 - t)^2} \text{ A}.$$

b) Ha a C_2 lemezei közelednek: $v_1 = +10$ cm/s és $v_2 = -10$ cm/s. Ekkor a t és $t + \Delta t$ között az átlagos áram:

$$\overline{I(t)} = \frac{-2{,}4}{(10+t)(10+t+\Delta t)}\ \text{A}.$$



2. ábra

A pillanatnyi áram (2. ábra):

$$I(t) = -\frac{2{,}4}{(10+t)^2}\ \text{A}.$$

A „−” előjel mutatja, hogy ekkor a töltések C_1-ből a C_2-be áramlanak.

Battha László (Bp., Eötvös J. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A feladat nem reális. A fenti adatok mellett megvalósítása lehetetlen. 1 pF kapacitás 0,1 C töltés esetén 10^{11} volt feszültséget jelent, továbbá a tér sem lehet homogén. Erre egyik megoldó sem mutatott rá.