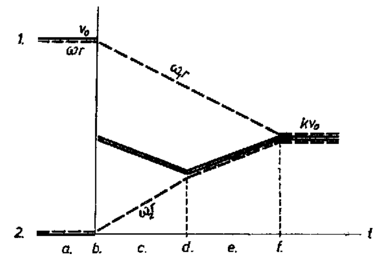
Foglalkozzunk az általános esettel. Tartozzon a kezdetben guruló golyóhoz az 1., az eredetileg állóhoz a 2. index. A golyók kerületi sebességei a középponthoz viszonyítva $\omega_1 r$ és $\omega_2 r$. A tehetetlenségi nyomatékok $I_1 = \Phi m_1 r^2$ és $I_2 = \Phi m_2 r^2$, ($\Phi = 0{,}4$ gömbnél). Az ún. tömeghányadok:

$$k = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \qquad 1 - k = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

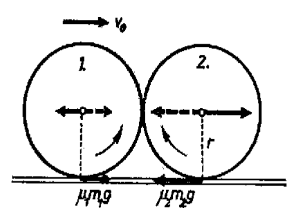
Az ütközés előtti állapotban (a indexszel jelölve) $v_{1\mathrm{a}} = v_0$, $v_{2\mathrm{a}} = 0$, $\omega_{1\mathrm{a}} r = v_0$, $\omega_{2\mathrm{a}} r = 0$. Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor $\mu_1 m_1 < \mu_2 m_2$: A sebességek időtől való függését az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Közvetlenül az ütközés pillanatában (b) $v_{1\mathrm{b}} = v_{2\mathrm{b}} = kv_0$; $\omega_{1\mathrm{b}} r = v_0$, $\omega_{2\mathrm{b}} r = 0$. Ezután ($c$–állapot) az első golyó forgását a súrlódás fékezi $\mu_1 m_1 g$ erővel, a második golyó forgása a súrlódás következtében gyorsul, itt a súrlódási erő $\mu_2 m_2 g$. Hozzá véve az első golyó középpontjában $\pm\mu_1 m_1 g$, a második golyó középpontjában $\pm\mu_2 m_2 g$ erőket (2. ábra), a két golyó középpontjait együttesen $(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1)g$ erő $(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1)g/(m_1 + m_2)$ gyorsulással lassítja, tehát az együtt maradó golyók centrumainak sebessége:

$$v_{1\mathrm{c}} = v_{2\mathrm{c}} = kv_0 - \frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \cdot t.$$



2. ábra

Az első golyó forgása lassul, a másodiké gyorsul:

$$\omega_{1\mathrm{c}} r = v_0 - \frac{\mu_1 g}{\Phi} \cdot t, \qquad \omega_{2\mathrm{c}} r = \frac{\mu_2 g}{\Phi} \cdot t.$$

Mindez addig tart, amíg a 2. golyó kerületi sebessége el nem éri a középpontok közös sebességét (d) állapot. Az az időpont:

$$t_{\mathrm{bd}} = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{\Phi m_1}{\Phi(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1) + \mu_2(m_1 + m_2)}.$$

Ekkor:

$$v_{1\mathrm{d}} = v_{2\mathrm{d}} = \omega_{2\mathrm{d}} r = v_0 \cdot \frac{\mu_2 m_1}{\Phi(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1) + \mu_2(m_1 + m_2)},$$

az első golyó még mindig köszörül, kerületi sebessége ekkor

$$\omega_{1\mathrm{d}} r = v_0 - v_0 \cdot \frac{\mu_1 m_1}{\Phi(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1) + \mu_2(m_1 + m_2)}.$$

Az ezután következő szakaszban (e) a hátsó golyó még mindig köszörül, lenn $\mu_1 m_1 g$ súrlódási erő működik. Ezzel mindkét golyó középpontját gyorsítja és az elöl levő (2) golyót felpörgeti úgy, hogy a golyók továbbra is együtt maradnak és a 2. golyó simán gurul. Most a 2. golyó alsó érintkezési pontján X súrlódási erő lép működésbe. X kiszámítására egyenlővé tesszük a középpontok gyorsulását a 2. golyó kerületi gyorsulásával:

$$\frac{\mu_1 m_1 g - X}{m_1 + m_2} = \frac{X}{\Phi m_2}.$$

Innen

$$X = \frac{\Phi\mu_1 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + \Phi m_2}.$$

Bizonyítható, hogy $X < \mu_2 m_2 g$, tehát keletkezhet ekkora súrlódási erő.

Ebben a szakaszban:

$$v_{1\mathrm{e}} = v_{2\mathrm{e}} = \omega_{2\mathrm{e}} r = v_0 \frac{\mu_2 m_1}{\Phi(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1) + \mu_2(m_1 + m_2} + \frac{\mu_1 m_1}{m_1 + m_2 + \Phi m_2} gt.$$

t időt most d-állapottól számítjuk. $\omega_1 r$ az eddigi ütemben csökken.

A végső (f) állapot akkor következik be, amikor az 1. golyónál is beáll a sima gördülés. Ennek időtartama a d-állapottól számítva:

$$t_{\mathrm{df}} = \frac{v_0}{\mu_1 g} \cdot \frac{m_1 + m_2 + \Phi m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\Phi(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1)}{\Phi(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1) + \mu_2(m_1 + m_2)}.$$

Ekkor mindkét golyóra nézve létrejön a sima gördülés a közönséges rugalmatlan ütközés (már b-ben meglevő) sebességével:

$$v_{1\mathrm{f}} = v_{2\mathrm{f}} = \omega_{1\mathrm{f}} r = \omega_{2\mathrm{f}} r = k v_0.$$

A folyamat teljes ideje:

$$t_{\mathrm{bf}} = t_q textbd + t_{\mathrm{df}} = \frac{v_0 \Phi m_2}{\mu_1 g(m_1 + m_2)},$$

függetlenül μ_2-től.

Ha $\mu_1 m_1 > \mu_2 m_2$, akkor a középpontok sebessége először felgyorsul és először az 1. golyó éri el a sima gördülést, majd a középpontok sebessége újra lassul és a végállapotban valamennyi sebesség újra kv_0. Az erre az esetre vonatkozó képletek hasonló módon vezethetők le. A sebességek ismeretében mindkét esetben könnyen számítható a mozgási energiák változása. Ha $\omega_1 m_1 = \mu_2 m_2$, akkor a versenyfeladatban szereplő egyszerű eset áll fenn.

Numerikus adatok néhány esetben.

m_1	100	100	100	300	300
m_2	100	300	100	100	100
μ_1	0,02	0,02	0,04	0,02	0,02
μ_2	0,04	0,02	0,02	0,02	0,04
kv_0	0,5v_0	0,25v_0	0,5v_0	0,75v_0	0,75v_0
$t_{\mathrm{bd}} v_0/g$-ben	50/11	35/6	50/11	25/6	50/11
$t_{\mathrm{bf}} v_0/g$-ben	10	15	10	15	7,5
$v_{1\mathrm{d}} = v_{2\mathrm{d}} v_0$-ban	5/11	5/24	6/11	19/24	17/22