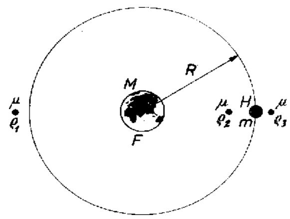
Ha R távolságra tesszük a műholdat, akkor biztos, hogy nem ilyen pályát kapunk, mert a Hold vonzóereje is számít.

Mivel a feladat szövege csak a pálya egzisztenciája felől érdeklődik, ezért elég, ha egy speciális pályatípuson belül mutatunk példát. Keressünk tehát a mondott feltételeket kielégítő kör alakú pályát. Mivel körpályán a gyorsulás mindig sugárirányú, ezért a műhold csak a Föld és Hold középpontját összekötő egyenesen helyezkedhet el, mert csak így lesz a Holdból származó vonzóerő sugárirányú. A lehetséges elrendezések esetén (ábra) írjuk fel a Földtől ϱ távolságra keringő műholdra t időpillanatban ható erőket.



1. Ha a műhold és a Hold között van a Föld, akkor

$$F = \frac{fM\mu}{\varrho^2} + \frac{fm\mu}{(R+\varrho)^2}.$$

2. Ha a Hold és a Föld között van a műhold, akkor

$$F = \frac{fM\mu}{\varrho^2} - \frac{fm\mu}{(R-\varrho)^2}.$$

3. Ha a Föld és a műhold között van a Hold, akkor

$$F = \frac{fM\mu}{\varrho^2} + \frac{fm\mu}{(R-\varrho)^2}.$$

Az $F = ma$ mozgásegyenlet alapján körpálya esetén $a = \varrho\omega_{\mathrm{H}}^2$, ahol feltevésünk szerint ω_{H} a Hold szögsebessége:

$$\omega_{\mathrm{H}}^2 = \frac{fM}{R^3}.$$

Ha a műhold tényleg ω_{H} szögsebességű pályán kering, akkor mindig a fent számolt konstans erők valamelyikét érzi, hisz az erőtér együtt fordul el vele. Vagyis a keresett pálya tényleg létezik, ha van olyan ϱ, amely kielégíti a következő egyenletet:

$$\mu\varrho\frac{fM}{R^3} = \frac{fM\mu}{\varrho^2} \pm \frac{fm\mu}{(R\pm\varrho)^2} \text{ (- és + sorrend kizárva).}$$

Rendezve:

$$\varrho = R^3\left(\frac{1}{\varrho^2} \pm \frac{m}{M}\cdot\frac{1}{(R\pm\varrho)^2}\right).$$

Ebből:

$$R^3(R\pm\varrho)^2 \pm \frac{m}{M}\varrho^2R^3 - \varrho^3(R\pm\varrho)^2 = 0.$$

Ez ötödfokú egyenlet ϱ-ra.

Vizsgáljuk meg, hogy van-e az említett esetek valamelyikében pozitív valós ϱ értéket adó megoldás.

1. eset:

$$f(\varrho) = R^3(R+\varrho)^2 + \frac{m}{M}\varrho^2R^3 - \varrho^3(R+\varrho)^2 = 0.$$

Tekintsük a bal oldalt ϱ polinomjának, és vizsgáljuk az értékét $\varrho = R$ és $\varrho = 2R$ helyeken:

$$f(\varrho = R) = +\frac{m}{M}R^5 > 0,$$

$$f(\varrho = 2R) = 9R^5 + \frac{m}{M}4R^5 - 72R^5 < 13R^5 - 72R^5 < 0, \text{ mivel } \frac{m}{M} < 1.$$

Vagyis az $f(\varrho)$ polinomnak R és $2R$ között van zérus helye, hisz az $[R, 2R]$ intervallum egyik végén pozitív, a másikon negatív, tehát valahol közben a nullán is átment. Az $f(\varrho)$-t ϱ függvényében felrajzolva:

$$\varrho_1 \approx 1{,}001\cdot R.$$

2. eset:

$$\begin{aligned}
f(\varrho) &= R^3(R-\varrho)^2 - \frac{m}{M}\varrho^2 R^3 - \varrho^3(R-\varrho)^2,\\
f(0) &= +R^5 > 0,\\
f(R) &= -\frac{m}{M}R^5 < 0.
\end{aligned}$$

Tehát $[0, R]$ intervallumon belül van megoldása az egyenletnek. Grafikusan megoldva:

$$\varrho_2 = 0,85 \cdot R.$$

3. eset:

$$\begin{aligned}
f(\varrho) &= R^3(R-\varrho)^2 + \frac{m}{M}\varrho^2 R^3 - \varrho^3(R-\varrho)^2,\\
f(R) &= +\frac{m}{M}R^5 > 0,\\
f(2R) &= R^5 + \frac{m}{M}4R^5 - 8R^5 < -3R^5 < 0.
\end{aligned}$$

R és $2R$ között itt is van megoldás.

Grafikusan megoldva: $\varrho_3 \approx 1{,}17 \cdot R$.

Tehát létezik a kívánt tulajdonságokkal rendelkező pálya, sőt a megoldásból látszik, hogy legalább 3 ilyen pálya van.

Gnädig Péter (Budapest)

Megjegyzés. *Szalay Sándor* (Debrecen) megmutatta, hogy ha figyelembe vesszük azt, hogy a Föld is kering a rendszer közös súlypontja körül, akkor a Föld és Hold középpontját összekötő egyenesen kívül is található olyan pont (ún. Lagrange-pont), ahová a műholdat elhelyezve, az keringés közben nem változtatja helyzetét sem a Földhöz, sem a Holdhoz képest.