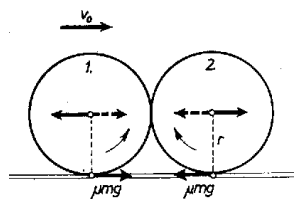


Az ütközés előtt az 1. golyó középpontja  $v_0$  sebességgel halad, és ez a golyó  $\omega = v_0/r$  szögsebességgel forog középpontja körül. Forgásának  $\omega r$  kerületi sebessége  $v_0$ , a golyó simán gurul. A 2. golyó középpontja áll, és forgásának szögsebessége 0.



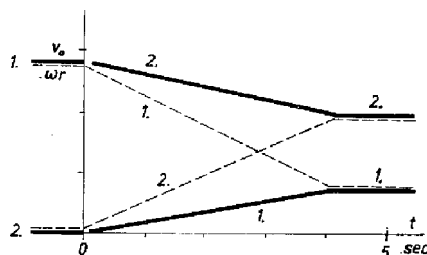
1. ábra

Közvetlenül a rugalmas ütközés után a középpontok sebessége felcserélődik: az 1. golyó középpontja megáll, a 2. golyó középpontja viszont  $v_0$  sebességgel indul el. A forgások szögsebessége első pillanatban még megmarad. Az 1. golyó  $\omega r$  kerületi sebességgel forog, miközben középpontja áll, ezért az érintkezési pontban  $\mu mg$  előre mutató súrlódási erő lép fel (1. ábra). A középpontban hozzáveszünk  $\pm \mu mg$  erőket. Közülük a jobb oldali gyorsítja a golyó középpontját  $\mu g$  gyorsulással, tehát az 1. golyó, amely pillanatnyilag megállt, egyenletesen gyorsuló mozgást kezd végezni, amelynek sebessége:

$$(1) \quad v_1 = \mu g t.$$

A hozzávett két erő közül a bal oldali a súrlódási erővel együtt  $\mu mgr$  forgatónyomatéket ad, amely fékezi a forgást  $\beta = \mu mgr/I$  szöggyorsulással ( $I$  a tehetetlenségi nyomaték); a kerületi pont lineáris gyorsulása  $\beta r = \mu mgr^2/I$ . A középponthoz viszonyított forgás kerületi sebessége lassul:

$$(2) \quad v_0 - \frac{\mu g}{I/mr^2} \cdot t.$$



2. ábra

A középpont mozgásának gyorsulása és a kerületi sebesség fékeződése addig tart, amíg (1) és (2) értéke egyenlő nem lesz (2. ábra):

$$\mu g t_0 = v_0 - \frac{\mu g}{I/mr^2} \cdot t_0.$$

A fékeződés  $t_0$  időtartama ebből az egyenletből:

$$(3) \quad t_0 = \frac{v_0}{\mu g} \cdot \frac{I/mr^2}{1 + I/mr^2}.$$

Ezután az 1. golyó simán gurul tovább, középpontjának sebessége és kerületi sebessége egyező, függetlenül  $\mu$ -tól:

$$(4) \quad v_{11} = v_0 \cdot \frac{I/mr^2}{1 + I/mr^2}.$$

Közvetlenül az ütközés után a 2. golyó középpontja  $v_0$  sebességgel halad, miközben a középpont körüli forgás 0. A golyó köszörül, a súrlódási erő hátrafelé irányul, a középpontban hozzávett  $\pm \mu mg$  erők közül a bal oldali lassítja a középpont haladását, ezért a 2. golyó középpontjának haladási sebessége:

$$(5) \quad v_2 = v_0 - \mu g t.$$

A középpont körüli forgás gyorsul és a kerületi pont sebessége

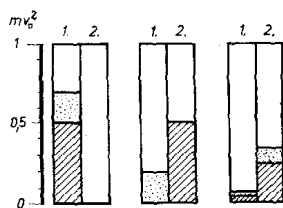
$$(6) \quad \frac{\mu g}{I/mr^2} \cdot t.$$

A középpont haladásának lassulása és a forgás gyorsulása addig tart, amíg a sebességek egyenlővé nem válnak. Ennek időpontja, az (5) és (6) egyenlővé tevéséből adódó egyenlet megoldása szerint egyezik a (3) által  $t_0$ -ra kapott eredménnyel. Ezután a 2. golyó is simán gördülve gurul tovább

$$(7) \quad v_{22} = v_0 \cdot \frac{1}{1 + I/mr^2}$$

sebességgel.

Feladatunk számadatai szerint az 1. golyó középpontjának gyorsulása és a 2. golyó középpontjának lassulása  $20 \text{ cm/s}^2$ , a forgást lassító és gyorsító forgatónyomatékok  $10^4 \text{ din} \cdot \text{cm}$ , az ehhez tartozó szöggyorsulások (mivel gömbnél  $I = 0,4mr^2$ )  $\beta = 10 \text{ s}^{-2}$ , a forgás kerületi sebességének lassulása, illetve gyorsulása  $50 \text{ cm/s}^2$ , a végállapot elérésének ideje (3) szerint  $t_0 = 4 \text{ s}$  és a golyók végső sebességei (4) és (7) szerint  $v_{11} = 80 \text{ cm/s}$ ,  $v_{22} = 200 \text{ cm/s}$ . A végső sebességek függetlenek a súrlódási együtthatótól. Bár a 2. golyó utánairamodik az 1. golyónak, sohasem éri el, és távolságuk mindig nagyobb lesz. Kiszámíthatjuk a sima gurulásig megtett utat is: az 1. golyónál  $\mu gt_0^2/2 = 160 \text{ cm}$ , a 2. golyónál  $v_0 t_0 - \mu gt_0^2/2 = 960 \text{ cm}$ .



3. ábra

A haladó mozgás kinetikus energiája  $0,5mv_0^2$ . A forgáshoz tartozó mozgási energia  $0,5\omega^2 I = 0,5v^2 I/r^2$ , ahol  $v$  a kerületi sebesség; gömbnél  $I = 0,4mr^2$ , és így a forgáshoz tartozó mozgási energia  $0,2mv^2$ . Az ütközés előtt az 1. golyó mozgási energiája  $0,5mv_0^2 + 0,2mv_0^2 = 0,7mv_0^2$ , illetve  $3\,920\,000 + 1\,568\,000 = 5\,488\,000 \text{ erg}$ ; a 2. golyónak semmiféle mozgási energiája sincs (3. ábra). Közvetlenül az ütközés után az 1. golyónak megmarad a  $0,2mv_0^2$  forgásból származó mozgási energiája, de a haladó mozgáshoz tartozó  $0,5mv_0^2$ -et átadta a 2. golyónak, mint haladó mozgásának kinetikus energiáját. A végállapotban az 1. golyónak haladásból  $2mv_0^2/49 = 0,0408mv_0^2 = 320\,000 \text{ erg}$ , forgásból  $4mv_0^2/245 = 0,0163mv_0^2 = 128\,000 \text{ erg}$ , összesen  $2mv_0^2/35 = 0,0571mv_0^2 = 448\,000 \text{ erg}$  mozgási energiája van. A 2. golyó mozgási energiája a haladásból  $25mv_0^2/98 = 0,2551mv_0^2 = 2\,000\,000 \text{ erg}$ , forgásból  $5mv_0^2/49 = 0,1020mv_0^2 = 800\,000 \text{ erg}$ , összesen  $5mv_0^2/14 = 0,3571mv_0^2 = 2\,800\,000 \text{ erg}$ . A végállapotban a két golyó együttes mozgási energiája a haladásból  $29mv_0^2/98 = 0,2961mv_0^2 = 2\,320\,000 \text{ erg}$ , a forgásból  $29mv_0^2/245 = 0,1181mv_0^2 = 928\,000 \text{ erg}$ , összesen  $29mv_0^2/70 = 0,4142mv_0^2 = 3\,248\,000 \text{ erg}$ . Hővé alakult  $2mv_0^2/7 = 0,2858mv_0^2 = 2\,240\,000 \text{ erg}$ , az összes mozgási energia  $20/49$ -ed része.

Jung József (Szeged, Radnóti g. III. o. t.)